Luis Radford, Mélanie André

CEREBRO, COGNICIÓN Y MATEMÁTICAS

BRAIN, COGNITION AND MATHEMATICS

RESUMEN. En este artículo abordamos el problema de la relación entre el cerebro, la cognición y las matemáticas. En la primera parte discutimos algunos elementos de la anatomía y crecimiento del cerebro; a partir de esos elementos y de resultados recientes de investigaciones en neurociencias, en la segunda parte presentamos un esbozo de las regiones cerebrales que generalmente están asociadas al pensamiento aritmético. Aquí, ponemos una particular atención a las áreas cerebrales que se activan en el pasaje del pensamiento aritmético perceptual (común en varias especies) al simbólico calculatorio (específico del humano). Luego, hacemos un resumen de las investigaciones que han sido efectuadas en las neurociencias con respecto a las partes cerebrales asociadas con el pensamiento algebraico. La revisión de la literatura ofrece un panorama general que subraya la naturaleza multimodal de la cognición en general y de la cognición matemática en particular. Dicha naturaleza multimodal de la cognición es compatible con diferentes niveles explicativos del desarrollo ontogénico del cerebro, el cual está fuertemente ligado al contexto cultural. En las conclusiones sugerimos ciertos problemas y cuestiones que podrían ser puntos de partida de un programa de investigación que incluya a educadores y neurocientíficos.

PALABRAS CLAVE: Cerebro, matemáticas, álgebra, plasticidad cerebral, multimodalidad.

ABSTRACT. In this article, we discuss the problem of the relationship between brain, mathematics, and cognition. In the first part, we present some elements concerning the anatomy of the brain and its growth. Against this background and drawing on current neuroscience research, we offer a summary of the cerebral parts usually associated with arithmetic thinking and the transition from perceptual arithmetic (common to several species) to symbolic arithmetic (specific to the human species only). Our discussion then turns around brain research and algebra. The literature review offers a general panorama that points out the multimodal nature of cognition in general and mathematical cognition in particular. This multimodal nature of cognition is compatible at different levels with the ontogenetic development of the brain –a development that turns out to be strongly related to the cultural context. In the conclusions we suggest some problems and questions that may be useful contact points for a research program between educators and neuroscientists.

KEY WORDS: Brain, mathematics, algebra, brain plasticity, multimodality.

RESUMO. Neste artigo, abordamos o problema da relação entre cérebro, cognição e matemática. Na primeira parte, apresentaremos certos elementos em relação à anatomia e o crescimento do cérebro. À partir destes elementos e de resultados recentes da pesquisa em neurociências, na segunda parte, nós apresentaremos um esboço das regiões cerebrais geralmente associadas ao pensamento aritmético.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2009) 12(2): 215-250.
Recepción: Enero 28, 2009 / Aceptación: Mayo 29, 2009.

Em particular, apresentamos um problema interessante do ponto de vista didático, qual seja, as regiões corticais ativadas quando da passagem do pensamento aritmético perceptual (presente em várias espécies) ao pensamento aritmético simbólico calculatório (específico dos seres humanos). Em seguida, fazemos um resumo das pesquisas efetuadas em neurociências relativas à Algebra. A revisão da literatura oferece um panorama geral que destaca a natureza multimodal da cognição em geral e da congnição matemática em particular. Esta natureza multimodal da cognição é compatível com vários níveis do desenvolvimento ontogénico do cérebro, desenvolvimento que resulta ser fortemente ligado ao contexto cultural. Nas conclusões, sugerimos certos problemas e questões que poderiam servir de ponto de partida de um programa de pesquisa para educadores e neurocientistas.

PALAVRAS CHAVE : Cérebro, matemática, álgebra, plasticidade do cérebro, multimodalidade.

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous abordons le problème de la relation entre cerveau, mathématiques et cognition. Dans la première partie, nous présentons certains éléments en relation avec l'anatomie et la croissance du cerveau. À partir de ces éléments et de résultats récents de la recherche neurologique, nous présentons, dans la deuxième partie, un sommaire des parties cérébrales généralement associées à la pensée arithmétique. Nous payons une attention particulière à un problème intéressant du point de vue didactique, à savoir celui des régions corticales activées lors de la transition de la pensée arithmétique perceptuelle (présente chez plusieurs espèces) à la pensée arithmétique symbolique calculatoire (spécifique à l'humain seulement). Par la suite, nous faisons un résumé des recherches effectuées en neuroscience qui touchent la question des régions corticales activées par la pensée algébrique. La recension des recherches dans ce domaine offre un panorama général qui souligne la conception multimodale de la cognition en générale et de la cognition mathématique en particulier. Cette nature multimodale de la cognition est compatible à plusieurs niveaux avec le développement ontogénétique du cerveau, développement qui s'avère fortement lié au contexte culturel. Dans les conclusions, nous suggérons certains problèmes et questions qui pourraient servir de point de départ d'un programme de recherche entre éducateurs et neuroscientifiques.

MOTS CLÉS : Cerveau, mathématiques, algèbre, plasticité du cerveau, multimodalité.

1. Introducción

El 12 de abril de 1861, una persona de 51 años de edad fue admitida en una unidad cirúrgica del hospital Bicêtre, en Francia. Esta persona, conocida bajo el pseudónimo de *Tan*, había sido hospitalizada a los 31 años, luego de haber perdido habilidades del habla. *Tan*, quien también había desarrollado una parálisis y perdido sensibilidad en el lado derecho, murió algunos días más tarde. El jefe de la unidad cirúrgica, Paul Pierre Broca, llevó a cabo una autopsia que le permitió localizar una lesión en la circunvolución prefrontal inferior del hemisferio cerebral izquierdo de *Tan*. Ese mismo año, Broca presentó el cerebro de *Tan* a la Sociedad Francesa de Antropología; para 1863, Broca había ya recopilado ocho casos en los que la pérdida del lenguaje se encontraba correlacionada con daños en la misma parte del cerebro, que lleva hoy en día el nombre del eminente médico francés (Finger, 2004).

El hallazgo de Broca –que muestra claramente la existencia de una relación entre dicha parte del cerebro y la pérdida de las habilidades del habla, lo cual se conoce como *la afasia de Broca*– es considerado como el punto de partida de la neurología moderna (Kosslyn y Koening, 1992; Luria, 1966, 1973). Las observaciones sistemáticas de pacientes afectados por lesiones cerebrales, hechas a lo largo del siglo XX, permitieron profundizar en los misterios de la anatomía y funcionamiento del cerebro. Recientemente, nuevas tecnologías han hecho posible un estudio más fino del cerebro y su relación con el pensamiento.

Ahora bien, no hay que olvidar que, a pesar de los progresos recientes, los estudios sobre la relación entre cerebro y cognición se efectúan en laboratorios altamente especializados, con ayuda de un equipo sofisticado y bajo condiciones que están lejos de ser naturales. Es evidente que el contexto de la investigación neurológica hace difícil extrapolar sus resultados sobre el funcionamiento del cerebro al campo del aprendizaje, como se desarrolla en la escuela. Por tanto, hay que ser prudentes cuando transponemos al aula las conclusiones que provienen de investigaciones neurológicas llevadas a cabo en entornos precisamente controlados.

Las implicaciones pedagógicas que formulan los estudios en neurología se encuentran en sus inicios. No obstante, hay un potencial importante en la contribución que la investigación neurológica puede hacer al campo educativo; por ejemplo, como apoyo a los métodos ocupados actualmente en educación (Goswami, 2004). El primer número de la primera revista científica dedicada a este tema, *Brain, Mind and Education*, apareció en 2007. Uno de los artículos lleva un título muy revelador: “How educational theories can use neuroscientific data”. Sus autores indican que uno de los problemas es la gran diferencia entre los métodos de investigación utilizados en neurociencias y en educación (Willingham y Lloyd, 2007). Otro problema no menos importante lo constituye el hecho de que todo intento por localizar las partes cerebrales activadas durante la resolución de problemas complejos puede resultar poco fructífero, ya que en esos casos prácticamente todas las partes del cerebro resultan ser activadas (Willingham y Lloyd, 2007, p. 147).

Sin embargo, existen varias razones que justifican el interés de la didáctica de las matemáticas por la investigación actual sobre el cerebro, debido a que la neurociencia puede contribuir a esclarecer el problema general de la naturaleza del pensamiento. Esto puede ayudar a entender la problemática sobre el desarrollo conceptual y su relación con el contexto cultural, en particular a través de lo que se ha dado en llamar la *plasticidad del cerebro* (volveremos a este punto más adelante). Asimismo, la información que la neurociencia pone a disposición de los educadores en torno a la comprensión de problemas específicos, como el de la dislexia, da lugar a pensar que, a medida que la investigación neurocientifica avance, los educadores podrán estar más informados para afrontar esas situaciones y ofrecer mejores acciones que incidan en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Una de las preguntas que examinaremos en páginas siguientes es la relación entre el cerebro y las matemáticas. Nos interesaremos de manera particular en el vínculo entre cerebro, pensamiento aritmético y pensamiento algebraico. Pero antes de entrar de lleno en tal problemática, haremos un pequeño recordatorio de la anatomía y el desarrollo del cerebro en el curso de la vida del individuo (la *ontogénesis cerebral*).

2. Anatomía y desarrollo del cerebro humano

El desarrollo neurológico normal entre la concepción y la madurez está caracterizado, en primer lugar, por un *proceso progresivo* que resulta de una proliferación neurológica de la migración y mielinación de células; en segunda, por un *proceso regresivo* que surge de la muerte de células y de la pérdida de conexiones sinápticas. Sin embargo, los detalles del desarrollo del cerebro no han sido completamente dilucidados. Hay muchas preguntas que quedan sin respuesta, como apuntan Sowell, Thompson, Holmes, Jernigan y Toga (1999):

> Una comprensión completa del desarrollo del cerebro humano, desde el nacimiento hasta la edad adulta, pasando por la adolescencia, es esencial a nuestra comprensión del desarrollo cognitivo. Sin embargo, sabemos muy pocas cosas sobre la maduración del cerebro normal (p. 859).

A pesar de la falta de detalles, resulta claro que el desarrollo del cerebro no es constante. Los cambios más importantes en su morfología ocurren en el periodo que va desde antes del nacimiento hasta la infancia. Los trabajos en neurociencias sugieren que la tasa de crecimiento del cerebro es más pronunciada durante el periodo fetal y los primeros años de vida (Cantlon, Brannon, Carter y Pelphrey, 2006, p. 6). Al cuarto mes de gestación se observa en el feto una diferenciación de células; de igual manera, las neuronas y las células gliales se producen a un ritmo importante[1].

[1] Las células gliales apoyan el desarrollo del sistema nervioso y ayudan a la actividad funcional de las neuronas, facilitando la mielinación del sistema nervioso y, con ello, la transmisión de señales entre neuronas.

Por medio de un proceso de migración, esas células forman las primeras regiones cerebrales que asegurarán las funciones más elementales, como el movimiento reflejo, los comportamientos físicos y el equilibrio. Las áreas a cargo de los estímulos sensoriales, la memoria y las emociones son formadas un poco más tarde. Dichas estructuras neurológicas básicas permanecerán poco flexibles comparadas con otras más plásticas o maleables que serán formadas sobre las primeras; es decir, la neocorteza y la corteza cerebrales (Prochiantz, 1989). Esta es la parte del cerebro que se asocia con las actividades cognitivas superiores como la atención, la síntesis, la planificación, el razonamiento, la imaginación espacial y el lenguaje.

Si bien es cierto que durante la infancia se notan varios cambios importantes en las habilidades mentales y la maduración del cerebro, la relevancia de tal maduración no indica que el crecimiento del cerebro se detiene durante la infancia. El cerebro del adolescente continúa su desarrollo (Sowell y Jernigan, 1998, p. 600), incluso más allá de la adolescencia y termina por alcanzar su volumen máximo alrededor de los veinticinco años (Caviness, Kennedy, Bates y Makris, 1997, p.4). Incluso luego de haber alcanzado este punto máximo el cerebro no pierde su *plasticidad,* es decir, su capacidad de evolucionar en relación estrecha con el entorno del individuo. La plasticidad de la corteza cerebral humana es, sin duda, una de sus características más distintivas: ofrece un testimonio de la capacidad humana para hacer frente y adaptarse a ambientes y contextos muy diferentes (Healy, 1991). Esta plasticidad también se manifiesta en la capacidad de ciertas regiones corticales para asumir funciones que, en principio, serían efectuadas por regiones que han perdido su funcionalidad, a raíz de daños relativamente poco importantes. Como dice Luria (1973, p. 221), "lesiones comparativamente pequeñas en el lóbulo pre-frontal pueden ser compensadas por regiones vecinas." Sobre el plano de desarrollo, la plasticidad del cerebro puede expresarse del siguiente modo: la evolución de la corteza cerebral durante la vida del individuo depende de la manera en que utilizará su cerebro en distintas etapas de su crecimiento. Por ejemplo, Weinberger (2004) describe estudios que señalan diferencias entre el cerebro de los músicos y el de otras personas. La corteza auditiva de los músicos es más desarrollada que el promedio (aproximadamente 130 por ciento más voluminosa); además, la corteza motora asigna más importancia a la región que controla las partes del cuerpo necesarias para tocar el instrumento musical (como los dedos de la mano izquierda en los violinistas). De manera similar, la parte anterior del cuerpo calloso que tienen los músicos es más grande, lo cual asegura una transferencia más eficaz de la información motriz entre la corteza motora izquierda y derecha. Esto da como resultado una mejor coordinación cuando las dos manos son necesarias.

N. Gogtay y sus colaboradores hicieron un estudio longitudinal en niños normales de 13 años, con el propósito de analizar ciertos aspectos del desarrollo del cerebro. Estos investigadores querían trazar la maduración del cerebro a través de cambios en la materia gris de la región cortical del cerebro (Gogtay, Giedd, Lusk, Hayashi, Greenstein, Vaituzis et al., 2004). Los resultados principales de este trabajo, que duró 10 años, indican que la corteza de asociaciones de orden superior madura después de las cortezas visual (región 7, figura 1) y somatosensoriales de orden inferior (regiones 7 y 4, respectivamente). Para entender esa información, conviene recordar ciertas regiones de la corteza cerebral humana, como las siguientes:

Lóbulo frontal
1 = Corteza prefrontal
2 = Corteza premotor
3 = Área motriz primaria

Lóbulo parietal
4 = Área sensorial primaria
5 = Corteza de asociación del lóbulo parietal

Lóbulo occipital
6 = Corteza de asociación del lóbulo occipital
7 = Corteza visual primaria

Lóbulo temporal
8 = Corteza auditiva primaria
9 = Corteza superior temporal
10 = Corteza de asociaciones del lóbulo temporal

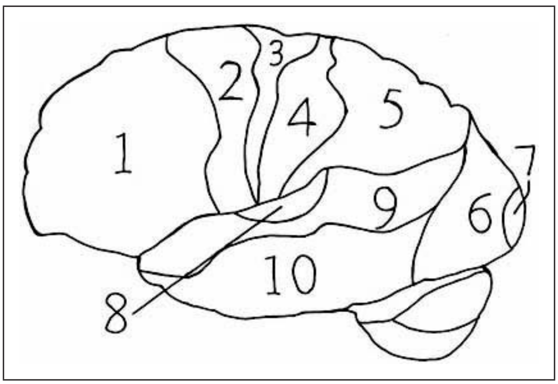


Figura 1. División en lóbulos de la corteza cerebral humana.

A pesar de que hay cierta heterogeneidad en los resultados, se puede discernir un patrón en la trayectoria del desarrollo: las partes del cerebro que se asocian con las funciones elementales (por ejemplo, las funciones motrices sensoriales) maduran más rápido (regiones 3 y 4). La maduración continúa en aquellas áreas que conciernen a la orientación espacial y desarrollo del lenguaje (región 5). Las regiones que maduran más tarde son las que atañen a las funciones ejecutivas y la atención (región 1), así como a la coordinación motriz (región 2), como ilustran Gogtay et al. (2004, p. 8177). En efecto, la corteza superior temporal (9), aquella que contiene las áreas de asociación que integran la información proveniente de varias modalidades sensoriales, es la que madura al último (Gogtay et al., 2004, p. 8174). La figura 2 esboza un panorama aproximado de la maduración del cerebro, según los resultados de Gogtay y sus colaboradores.

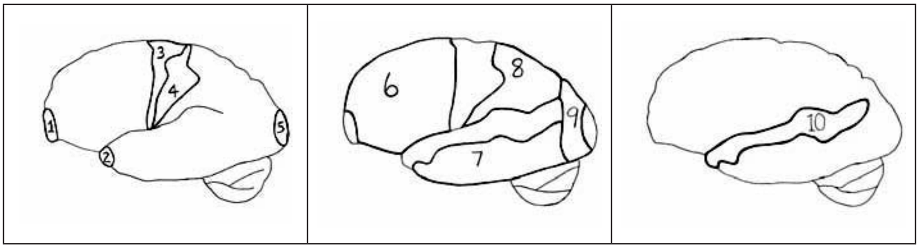


Figura 2. Secuencia aproximativa, según Gogtay et al. (2004), sobre la maduración del cerebro. A la izquierda está la parte que madura primero; en el centro, la parte que sigue; a la derecha, la parte que madura al último.

Este resultado así como otros similares (ver, por ejemplo, Caviness, Kennedy, Bates y Makris, 1997) son interesantes desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Su interés reside en que van en la misma dirección de ciertas teorías contemporáneas en didáctica y psicología que subrayan el papel importante de las diferentes modalidades sensoriales en el aprendizaje (Lakoff & Núñez, 2000; Arzarello, Bosch, Gascón y Sabena, 2008; Edwards, Radford y Arzarello, 2009). El trabajo de Gogtay y sus colaboradores no se limita a trazar la trayectoria del desarrollo del cerebro; también demuestra que, en el curso de la evolución, las partes que ya han madurado sirven como punto de partida a la maduración de otras partes y que, durante su aparición, las segundas se integran a las primeras (Gogtay et al., 2004, p. 8177).

Las acciones didácticas solidarias con esta evolución se traducirían en términos de actividades escolares que soliciten modalidades sensoriales variadas y permitan, a su vez, integrar estas actividades en otras de carácter más y más abstracto. Podríamos conjeturar que la enseñanza tradicional no va en la dirección de un crecimiento favorable de las funciones ejecutivas que sirven de fundamento al pensamiento matemático abstracto. No debemos olvidar que la adolescencia es el periodo en el que los bloques cognitivos que han empezado a formarse durante la infancia se refinan, por lo cual implica un periodo de transformación cerebral importante. Como señala Beatriz Luna:

> Las exigencias académicas aumentan de forma dramática, pues el pensamiento abstracto y la formación de reglas generales se convierten en elementos esenciales para poder llevar a cabo las actividades requeridas por el currículo, tanto en matemáticas como en lectura. Las funciones ejecutivas –funciones que reposan sobre habilidades como la memoria de trabajo y la inhibición de respuestas, y que nos permiten tener un comportamiento voluntario y dirigido hacia objetivos precisos– comienzan a madurar en la adolescencia (Luna, 2004, pp. 437-438).

Cabe pensar que, sin una estimulación adecuada y constante, la plasticidad del cerebro no será explotada con provecho, y que las conexiones neurológicas de integración que pertenecen a la corteza temporal superior no alcanzarán su nivel máximo de desarrollo.

3. El cerebro matemático

En un libro muy famoso, *The mathematical brain*, su autor, Brian Butterworth (1999), menciona el caso de un paciente italiano, el señor Tiziano, quien a raíz de un ataque cardiaco comenzó a tener dificultades para efectuar cálculos aritméticos simples (figura 3).

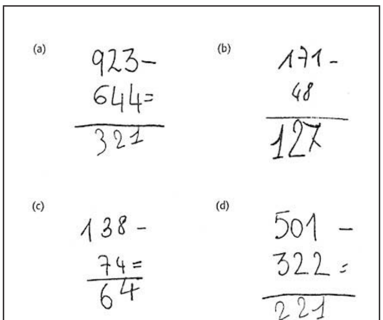


Figura 3. Algunas restas del señor Tiziano, luego de un ataque cardiaco (Butterworth, 1999, p. 188).

El señor Tiziano comenzó a incurrir en errores que no cometía antes; por ejemplo, empezó a restar con frecuencia el número más pequeño del más grande, una situación frecuente en niños que hacen restas por columnas. El ataque cardiaco afectó el lóbulo parietal izquierdo, una región del cerebro que generalmente está implicada en los cálculos numéricos, y además se asocia con sensaciones somáticas y varias funciones complejas, como la multimodalidad sensorial (visual, auditiva y táctil), la comprensión del lenguaje, la atención y la conciencia espacial (figura 4).

"Es precisamente esta región –dice Butterworth, refiriéndose al lóbulo parietal izquierdo– la que aparece casi siempre dañada en el caso de la discalculia" (1999, p. 207), es decir en el caso en los que la persona no puede reconocer los dígitos y signos aritméticos y muestra dificultades para efectuar cálculos elementales. Cantlon y sus colaboradores mencionan los casos de pacientes que han sufrido daños en la corteza parietal y tienen dificultades para distinguir el número más grande entre dos números escritos de manera simbólica; por ejemplo, 14 y 18 (Cantlon, Brannon y Carter, 2006, p. 844). Por el contrario, como afirma Butterworth, "pacientes que presentan deficiencias en actividades cognitivas, pero siguen funcionando adecuadamente en actividades numéricas, parecen tener el lóbulo parietal izquierdo sano" (Butterworth, 1999, pp. 207-208). Esto muestra el papel innegable que desempeña el lóbulo parietal izquierdo en la aritmética.

El consenso de los neurólogos sobre este tema fue expresado recientemente por Delazer y sus colaboradores:

> A pesar del hecho de que los resultados y las interpretaciones son a veces heterogéneas a través de los estudios [neurológicos], todos están de acuerdo en que el tratamiento de los números y los cálculos es apoyado por una red distribuida donde las regiones parietales desempeñan un papel crucial (Delazer, Domahs, Bartha, Brenneis, Lochy, Trieb et al., 2003, p. 77).

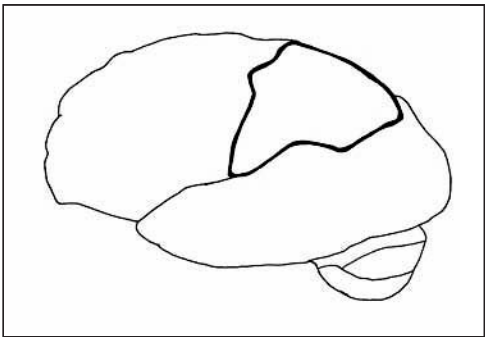


Figura 4. Lóbulo parietal.

¿Por qué con las habilidades numéricas se encuentran generalmente correlacionadas con el lóbulo parietal izquierdo y no con otra parte del cerebro? Butterworth sugiere una idea que es completamente coherente con lo que hemos llamado en la sección anterior la *concepción multimodal del pensamiento*.

Butterworth parte de un hecho a menudo observado en las personas que han sufrido daños en el lóbulo parietal izquierdo, ya sea a causa de un accidente, un problema de nacimiento u otro. Dichas personas muestran a menudo no sólo dificultades en aritmética, sino también en otros tres dominios:

1) Orientación en el espacio.
2) Control de sus propias acciones.
3) Representación de su cuerpo (particularmente los dedos).

El doctor Josef Gerstmann, un neurólogo austriaco, trató a una paciente de 52 años que no podía decir el nombre de sus propios dedos y mostrarlos individualmente. La paciente no podía tampoco distinguir su lado izquierdo del derecho; además, sus habilidades numéricas se encontraban muy reducidas (Butterworth, 1999, p. 249). De manera similar, en sus investigaciones sobre la discalculia Judy Ta'ir y sus colegas mencionan que problemas de habilidad visual, táctil y psicomotriz se encuentran acompañados de dificultades numéricas elementales (Ta'ir, Brezner y Ariel, 1997, p. 186).

Dichos ejemplos, así como numerosos casos de pacientes que tienen problemas con el lóbulo parietal izquierdo, sugieren la existencia de un vínculo entre una anomalía en los tres dominios mencionados y las dificultades de tipo numérico. ¿Pero porqué esas anomalías están relacionadas con la discalculia?

En armonía con la concepción multimodal del pensamiento, Butterworth (1999, p. 219) observa que la emergencia del conteo en los niños moviliza precisamente los tres dominios que hemos citado (figura 5). En efecto, a menudo, cuando el niño empieza a contar, toca o indica con gesto indexical los objetos contados; las acciones y gestos suponen una orientación en el espacio, sin la que el conteo se perdería. De manera frecuente, cuando algunos niños están contando varios objetos frente a ellos, "pierden" la cuenta debido a la falta de orientación espacial entre lo que ha sido tocado o indicado a través del gesto y aquello que queda por contar. Esto también significa una pérdida en el control de las acciones y de la posición respecto a los objetos que están siendo contados.

Para Butterworth, el hecho de que contar es una actividad cuyos orígenes aluden a una relación con el espacio, un control de acciones y la movilización de dedos, explica –por lo menos hasta cierto punto– que anomalías en la orientación espacial, el conteo y el reconocimiento de los dedos tienen correlación con daños en una misma zona cerebral. Tales consideraciones explican, aunque sea de manera parcial, que haya una relación muy estrecha entre la representación de las numerosidades que formamos en nuestro cerebro y las representaciones que formamos con nuestros dedos.

Figura 5. El conteo aparece mediatizado por acciones y gestos. Esta actividad de conteo reposa en la posición corporal (orientación), un control preciso de acciones y el papel de los dedos en la realización de esas acciones.

Al hablar sobre los numerosos ejemplos clínicos que presentan anomalías relacionadas con los puntos 1, 2 y 3 mencionados anteriormente y la discalculia, Butterworth dice:

> Esos resultados confirman la idea de que hay una conexión íntima entre la representación de los dedos y la representación de la numerosidad en el lóbulo parietal izquierdo. Más que eso, dichos resultados sugieren que, cuando la representación de los dedos no llega a desarrollarse normalmente, eso puede tener efectos acumulativos en el desarrollo de las habilidades numéricas (Butterworth, 1999, p. 244).

La discusión anterior no debería hacernos creer que el hemisferio derecho no toma parte en el pensamiento numérico y el sentido del número. Grafman, Kampen, Rosenberg, Salazar y Boller (1989) estudiaron a un veterano de guerra, conocido como J. S., quien perdió el hemisferio izquierdo a la edad de 22 años. Aunque J.S. perdió la mayor parte de sus habilidades aritméticas y tenía problemas lingüísticos severos, podía ejecutar ciertas tareas matemáticas simples. No podía escribir palabras o letras; sin embargo, era capaz de escribir números de uno o dos dígitos. J. S. podía escribir “7” ó “15”, mas no podía escribir “siete” o “quince”.

J. S. era capaz de hacer adiciones y sustracciones con números de un dígito, pero las multiplicaciones y las adiciones le resultaban difíciles, e incluso imposibles. Tareas de secuencias numéricas donde hay que encontrar el número que falta (como en la secuencia 6 9 12 ? 18), las cuales suponen un análisis lógico-numérico, se encontraban más allá de sus posibilidades. Había sin embargo un tipo de tarea que J.S. respondía generalmente de forma correcta: la comparación de números. En un test de 32 comparaciones de números de 4 a 5 dígitos, J. S. acertó 31.

En su libro *The number sense*, Stanislas Dehaene cuenta el caso de un paciente, el señor N, quien al igual que S. J. presentaba grandes dificultades para efectuar cálculos, pero sobresalía en otras áreas del pensamiento numérico. El señor N había sufrido daños en la mitad posterior del hemisferio izquierdo, y aunque no podía calcular 2+2, juzgaba sin dificultad que 5+7=19 era falso (Dehaene, 1997, p. 179). N –el "señor aproximado", como lo llama Dehaene– sobresalía en el terreno de la aproximación. Los ejemplos sugieren fuertemente que, si bien es cierto que el hemisferio izquierdo desempeña un papel importante en el pensamiento aritmético, ciertas tareas, como la comparación y la aproximación de números, pueden ser efectuadas por el hemisferio derecho. En el caso de un cerebro normal, es muy probable que, durante la resolución de problemas aritméticos, los hemisferios cerebrales interactúen al enviarse información mutuamente, y que el concepto de número en sus varias dimensiones (cuantitativa, cualitativa, perceptual, simbólica) resulte de esas interacciones.

La activación frecuente del lóbulo inferior izquierdo en el reconocimiento de números y el cálculo numérico llevó a Butterworth a sugerir que la "sede" de lo que él llama *módulo numérico* (*number module*) se ubica en la parte inferior del lóbulo parietal izquierdo y probablemente en aquella del lóbulo parietal derecho. Butterworth apunta que ese módulo numérico sería innato y explicaría la proeza que realizan los bebés de algunos meses: el reconocimiento rápido (puramente perceptual, sin conteo consciente) de numerosidades pequeñas de hasta 4 o máximo 5 objetos (Butterworth, 1999, p. 250). De 5 al infinito, el reconocimiento y conteo de colecciones ya no sería asegurado por el bagaje biológico con el cual llegamos al mundo, sino por la cultura.

4. De la aritmética biológica a la aritmética simbólica

En la Universidad de Arizona, en el laboratorio sobre la cognición del niño Karen Wynn llevó a cabo un experimento donde participaron más de 30 niños cuya edad promedio era de 5 meses. Los niños fueron divididos de manera aleatoria en dos grupos. Aquellos del grupo llamado "1+1" vieron que aparecía una muñeca en un espacio vacío. Una pequeña pantalla se levantó de tal manera que ocultó a la muñeca (figura 6); cuando la pantalla se encontraba levantada, el experimentador añadió otra muñeca. Después, el experimentador sacó lentamente su mano para asegurarse de que el niño viera que ninguna muñeca había sido retirada. Luego, la pequeña pantalla fue retirada.

Dicho proceso fue repetido varias veces para que el niño viera alternadamente primero dos muñecas y después una. En el primer caso, el niño notaría que el resultado de 1+1 sería 2; en el segundo, que el resultado de 1+1 sería 1. El experimento fue repetido seis veces con cada niño. Wynn midió el tiempo que el niño pasó observando el resultado (es decir, dos muñecas o una muñeca). Ese lapso de tiempo se consideró como un indicador de la aparición de un evento esperado o inesperado; un tiempo de observación más largo sería el síntoma de un resultado no esperado.

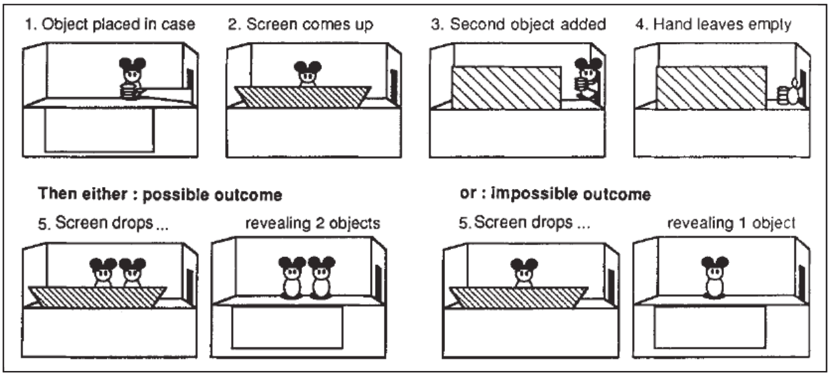


Figura 6. Situación experimental para estudiar la suma de 1+1 en bebés de 5 meses de edad (Wynn, 1992, p. 749).

El grupo llamado "2-1" participó en un experimento similar, pero estos niños vieron en principio un escenario con dos muñecas; se retiró una y el resultado posible sería una muñeca o dos.

Wynn estableció la siguiente conjetura: los niños del grupo "1+1" deberían en principio pasar más tiempo viendo el resultado cuando fuera una muñeca que cuando fuera 2 muñecas. Los niños del grupo "2-1" deberían pasar más tiempo viendo el resultado 2 que el 1. Y eso sucedió durante el experimento.

Según Wynn, estos resultados –que han sido comprobados en un experimento con bebés de 4 meses– revelan que dentro de nuestro bagaje biológico poseemos un sistema matemático simple (un *modelo numérico*, para utilizar la expresión de Butterworth), el cual nos permite distinguir pequeños números y hacer sumas y restas muy elementales (ver también el artículo de Starkey, Spelke and Gelman, 1990). Dicho *modelo numérico* no es exclusivo del ser humano, también se encuentra en el bagaje biológico de otras especies, como algunas aves y determinados chimpancés (figura 7; ver Devlin, 2005; Gallistel y Gelman, 1992; Savage-Rumbaugh y Lewin, 1994; Tomasello y Call, 1997).

La aparición del lenguaje, primero oral y después escrito, transforma radicalmente la aritmética elemental o innata. Con la inclusión de las palabras

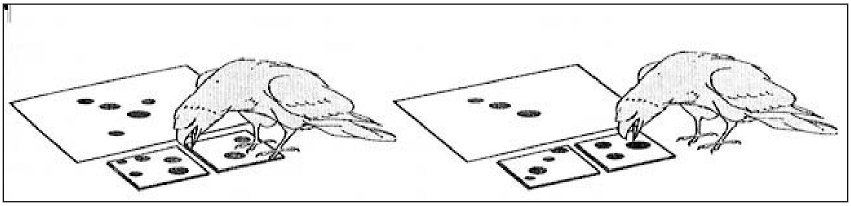


Figura 7. El etólogo alemán Otto Koehler mostró cómo su cuervo Jackob pudo identificar las figuras que tenían la misma cantidad de objetos: "5" a la izquierda y "3" a la derecha (Butterworth, 1999, p. 151).

"uno", "dos", "tres", etc. en el vocabulario del niño y después en la aritmética simbólica (que se basa en el cálculo y la representación del número con la ayuda de dígitos; por ejemplo, 12+25) surgen nuevas posibilidades que van más allá de la comparación perceptual de objetos y su cálculo limitado. La transición de la aritmética "perceptual" o concreta (que se funda en objetos) a la aritmética abstracta (cuyos sustentos son el lenguaje y los dígitos) está lejos de ser clara y probablemente repose en una activación de las diferentes partes del cerebro.

Butterworth (1999, p. 203) menciona el caso de un paciente, estudiado por Margerete Delazer, que no podía hacer tareas simples, como realizar adiciones simples presentadas simbólicamente (como "2+2") o multiplicaciones expresadas verbalmente (como "2 por 2"). Sin embargo, podía efectuar la suma si se le mostraba de manera concreta; por ejemplo, con la ayuda de círculos. El paciente llevaba a cabo la suma contando todos los círculos.

Debido a su complejidad, puede ser que el funcionamiento del pensamiento aritmético abstracto ocupe diferentes partes del cerebro. En un ejemplo que refiere Butterworth, un paciente podía leer números escritos de dos dígitos (como cincuenta y cuatro), pero no la expresión simbólica "54". Otro paciente que tuvo una hemorragia en el lóbulo parietal izquierdo tuvo, como el paciente anterior, muchas dificultades al leer los números de dos dígitos, pero los podía leer si estaban escritos con palabras (Butterworth, 1999, p. 203). Parecería entonces que el procesamiento cerebral de números es diferente, según su forma simbólica ("54") o lingüística ("cincuenta y cuatro"). Estos resultados, al ser comprobados en otros pacientes, causaron que Stanislas Dehaene hablara de una especialización en las diferentes regiones corticales, correspondientes a diferentes sentidos numéricos (Dehaene, 1997; ver en particular el capítulo 7).

Una pregunta interesante, desde el punto de vista didáctico, radica en entender las partes del cerebro que garantizan la transición de una aritmética concreta-perceptual a una abstracta-simbólica, practicada con la ayuda de dígitos.

Los estudios desarrollados en adultos han evidenciado el papel que desempeña el *surco intraparietal* o *intraparietal sulcus*, que se abrevia IPS (figura 8).

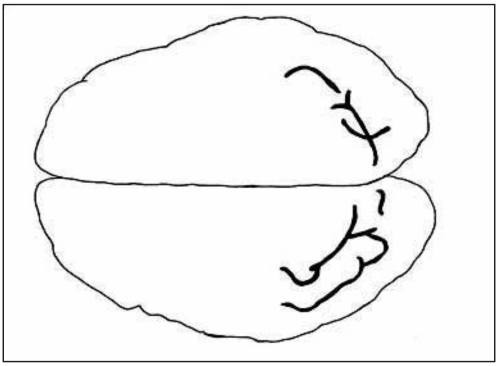


Figura 8. El surco intraparietal (IPS).

Este surco se activa fuertemente cuando los adultos hacen cálculos aritméticos con la ayuda de dígitos. Cantlon y sus colaboradores se preguntaron sobre el papel del surco intraparietal en la aritmética concreta: *¿El surco se activaría de igual forma en las tareas donde los números están presentes de manera concreta (por ejemplo, mediante puntos) o, por el contrario, estaría vinculado sólo con la aritmética abstracta?* Estos investigadores explican la importancia de tal pregunta de la siguiente manera:

> Una pregunta fundamental para el estudio de la cognición numérica es la de saber si las complejas habilidades simbólicas de los adultos comparten un origen neurológico con las habilidades numéricas no simbólicas. Un conjunto de evidencias sugieren que, desde el punto de vista de la evolución, la habilidad de comprender los valores numéricos expresados en formatos no verbales es una etapa preliminar importante de las habilidades numéricas simbólicas en la edad adulta (Cantlon, Brannon, Carter y Pelphrey, 2006, p. 850).

¿Este surco intraparietal se activaría en etapa adulta, como resultado de un desarrollo cognitivo, o sería un elemento que garantizara la continuidad entre el pensamiento aritmético del niño y el del adulto? Para responder dicha pregunta, Cantlon y sus colaboradores hicieron una investigación comparativa en la que participaron niños de 4 años de edad y adultos. Sus resultados muestran una activación del surco intraparietal en ambos grupos e indican que esta parte del cerebro asegura un vínculo entre la cognición simbólica (abstracta) del adulto y la cognición no simbólica (concreta) del niño. "Más importante aún –dicen ellos– es que nuestros resultados muestran que el IPS es activado tempranamente por los tratamientos no simbólicos dentro del desarrollo, antes de que comience la escuela formal" (Cantlon, Brannon, Carter, y Pelphrey, 2006, p. 851).

Otro trabajo reciente ha producido nueva luz sobre el papel del IPS, con respecto a aquellas repercusiones de las diferencias anatómicas que esta parte del cerebro puede tener en las habilidades de cálculo. Según Ansari y sus colaboradores:

> Evidencias recientes sugieren que puede haber diferencias anatómicas en el lado izquierdo del IPS entre los individuos, dependiendo de si presentan o no deficiencias en el cálculo... Estos resultados… sugieren que un desarrollo atípico de esta región puede impedir un exitoso desarrollo matemático. Es posible que esta región cortical, a lo largo de su desarrollo, represente las magnitudes numéricas de una forma cada vez menos aproximada, permitiendo así la construcción desarrollada del tratamiento exacto de números, como lo es el cálculo (Ansari Fugelsang, Dhital y Venkatraman, 2006, p. 1825).

Como hemos dicho anteriormente, al volverse complejo el pensamiento aritmético debido a que otras operaciones entran en juego (por ejemplo, la multiplicación y la división), otras regiones del cerebro se activan, además del IPS. Así, la resolución de problemas que implican la multiplicación suele activar la *circunvolución angular izquierda* (ver figura 9):

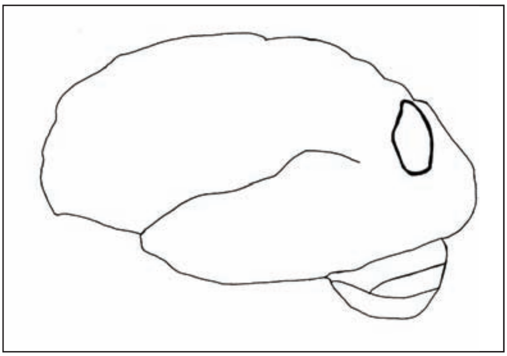


Figura 9. La circunvolución angular izquierda, mostrada en la foto, se activa normalmente en la multiplicación de números.

> Algunos investigadores han sugerido que esta región del cerebro [la circunvolución angular izquierda] es importante para la manipulación de valores numéricos que son característicos de la matemática en el humano adulto. Así, el desarrollo conceptual relacionado con las prácticas numéricas culturales, lingüísticas y simbólicas podría causar cambios en la red de regiones cerebrales implicadas en la matemática sofisticada de los adultos. Sin embargo, la base neurológica de los procesos aritméticos realizados sin el

> uso de símbolos numéricos [esto es, los procesos de aritmética concreta, LR y MA] en el IPS podría ser el núcleo de esa red matemática sofisticada durante el desarrollo (Cantlon, Brannon, Carter, y Pelphrey, 2006, p. 852).

La investigación de Cantlon y de sus colaboradores, así como la de Ansari y sus colegas, son muy recientes. Como sus autores indican, la de Cantlon es la primera en abordar el problema de las bases neurológicas que conciernen al desarrollo del pensamiento aritmético. Se necesitarán otros estudios para obtener una idea más clara de este complejo e interesante problema. La compleja especialización de las áreas cerebrales que se activan durante las tareas aritméticas elementales (comprensión de números en diferentes formatos semióticos, posibilidades de tratamiento según las operaciones aritméticas requeridas) puede interpretarse como una muestra de la complejidad conceptual que subtiende la formación del pensamiento aritmético. Esto puede servir para alertar al educador respecto a las dificultades que pueden surgir en el aula durante tareas que supuestamente son *tan simples*, como aprender a leer números y calcular simbólicamente.

5. El pensamiento algebraico y el cerebro

Si bien hay una gran cantidad de estudios que tratan la relación entre el cerebro y la comprensión oral y escrita de los números, así como entre el cerebro y los cálculos aritméticos elementales (suma, resta, multiplicación y división), existen muy pocos trabajos sobre el cerebro y el pensamiento matemático avanzado. Hemos consultado muchas bases de datos para encontrar artículos que centren su atención en el álgebra y el cerebro, pero nuestros esfuerzos han dado pocos frutos.

Cabe mencionar que los primeros trabajos neurológicos, donde los individuos estudiados tenían que ver con el álgebra, no definen como meta la investigación de correlaciones entre el álgebra y el cerebro. Dichos trabajos se centraron principalmente en atender los problemas de acceso y recuperación de la información; es decir, los relacionados con el funcionamiento de la memoria. La primera serie de trabajos se llevó a cabo por Anderson, Reder y Lebiere (1996), así como por Blesssing y Anderson (1996), seguida de un intermedio con una publicación de Anderson, Qin, Sohn, Stenger y Carter en 2003, y de una segunda serie de estudios, en que entran el de Luna (2004), y el de Qin, Carter, Seda, Stenger, Fissel y Goode (2004)[2].

[2] Un tercer artículo, el de Tweed, Haslwanter y Happe (1999) no reporta la relación cerebro-álgebra, pero sí la existencia de circuitos neuronales no conmutativos.

Las investigaciones que hemos referido dan una visión general sobre las regiones del cerebro que se activan en la solución de ecuaciones; asimismo, sugieren algunas respuestas a la pregunta de cuál es el momento óptimo para el aprendizaje del álgebra. A continuación, expondremos una visión general de los resultados.

5.1. *La primera serie*

Supongamos que le pedimos a usted que memorice una serie de cuatro dígitos (por ejemplo, 2 4 8 1). Luego le solicitamos que realice una tarea que requiere de una atención particular (la cual no necesariamente está relacionada con la serie de dígitos que intenta memorizar). Una vez que la tarea esté completa, usted debe reproducir la serie de dígitos.

En principio, su capacidad de retener en la memoria la serie de dígitos debería ser mejor cuando se enfrenta a una tarea sencilla que ante una compleja. También se puede pensar que el esfuerzo que usted hará por mantener la serie de dígitos en la memoria repercutirá en la forma como cumplirá la tarea. Puede ser que usted cometa más errores en el desempeño de la tarea cuando la serie de dígitos sea mayor; por ejemplo, si es de seis dígitos.

Aquí radica el problema del rol de la *memoria de trabajo*, en relación con la complejidad de una tarea que los investigadores Anderson, Reder y Leniere, de la Universidad de Carnegie Mellon, analizaron a mediados de 1990. Ellos realizaron dos estudios consecutivos con 15 y 20 sujetos, respectivamente, quienes eran estudiantes o personal de su universidad. Los investigadores querían tener una mejor idea sobre las causas que originan los errores, al notar que su frecuencia parecía aumentar a medida que crecía la complejidad de las tareas. En un trabajo anterior, notaron que el segundo error en la ecuación de fracciones, el cual se muestra enseguida, fue más frecuente que el yerro cometido en la ecuación de números enteros.

$$x + 6 = 9 \rightarrow x = 9 + 6$$
$$x + 6/5 = 9/4 \rightarrow x = 9/4 + 6/5$$

Según Anderson, Reder y Leniere, incluso cuando ambas ecuaciones sean formalmente idénticas, la mayor frecuencia de errores en la segunda ecuación podría explicarse por una mayor carga para la memoria de trabajo necesaria en la representación de las fracciones (1996, p. 222). Con base en investigaciones hechas a finales de la década de 1980, estos investigadores elaboraron la hipótesis de que el funcionamiento de la memoria de trabajo está limitada por el grado de atención que se ponga a varios objetos (1996, p. 225).

En su experimento, presentaron series de 2, 4 ó 6 dígitos a los sujetos. Primero, una serie de números apareció en la pantalla de una computadora durante algunos segundos. La serie desapareció y fue sustituida por una ecuación similar a la que ilustra la tabla I.

TABLA I

A la izquierda, tres ejemplos de ecuaciones sin sustitución. A la derecha, tres ejemplos con sustitución (Anderson, Reder y Leniere, 1996, p. 228). La primera ecuación de cada línea se llama ecuación de una etapa, mientras que las otras ecuaciones se denominan ecuaciones de dos etapas por los pasos necesarios para solucionarlas.

$x/3 = 6$	$x/a = b$
$3x - 2 = 7$	$ax - 2 = b$
$x/3 - 2 = 7$	$x/3 - a = b$

Frente a una ecuación sin sustitución, al sujeto se le pidió que la resolviera mentalmente; después se le dijo que escribiera, con ayuda de una calculadora, tanto la solución de la ecuación como la serie de dígitos dados al inicio, que tenía almacenados en su memoria. Ante una ecuación con sustitución, el sujeto debería reemplazar las letras *a* y *b* por los dos primeros dígitos de la serie retenida en su memoria y mostrarla en la pantalla, al inicio del experimento. De este modo, si los dígitos fueran “2 4 8 1”, el sujeto tendría que remplazar *a* por 2 y *b* por 4 en la ecuación y después resolverla.

Como era de esperarse, el sujeto tuvo más dificultades para recordar exactamente la serie de dígitos en el caso donde tenía que acordarse de las series de 6 dígitos y resolver las ecuaciones de dos etapas, y menos que en el caso en que necesitaba evocar la serie de 2 dígitos y solucionar las ecuaciones de una etapa. Por el contrario, el hecho de que el sujeto debiera resolver una ecuación con o sin sustitución no le provocó diferencias significativas.

Asimismo, la capacidad del sujeto para resolver una ecuación fue afectada por el tamaño de la serie a recordar. Cuando tuvo que mantener una serie de 6 dígitos se detectó una pequeña tasa de éxito (figura 10).

La pregunta de investigación que plantearon Anderson, Reder y Leniere se centró en la memoria; de manera más específica, en la memoria de trabajo y en cómo

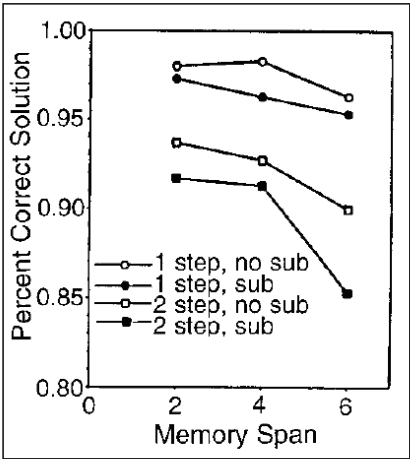


Figura 10. Porcentaje de soluciones correctas en una ecuación, según el tamaño de la serie de dígitos por memorizar (2, 4 ó 6 dígitos) que se llama en la figura Memory Span, y el tipo de ecuación (una o dos etapas, con o sin sustitución) que se designa en la figura como "1 step, 2 step, no sub, sub" (Anderson, Reder y Leniere, 1996, p. 230).

se ve afectada por la solución de un problema complejo. Vemos que su objetivo principal no fue responder los problemas tocantes al aprendizaje del álgebra. El álgebra todavía no alcanza el rango de objeto de estudio en estos trabajos, y hay mucho menos interés por detectar las regiones del cerebro que se activan en la solución de ecuaciones. De hecho, la investigación Anderson, Reder y Leniere no aborda el cerebro, sino la memoria. Habrá que esperar el desarrollo de las nuevas tecnologías para que la relación entre el álgebra y el cerebro se convierta en objeto de estudio.

5.2. *Un intermedio*

En 2003, John Anderson y otros colaboradores de la Universidad Carnegie Mellon, además de sus colegas en Pennsylvania, publicaron un artículo en el que ocupan básicamente la misma metodología: series de dígitos a memorizar durante la solución de ecuaciones con una o dos etapas, con o sin sustitución (Anderson, Qin, Sohn, Stenger y Carter, 2003). Aquí exploraron los procesos que pasan desapercibidos en la solución de problemas y perfeccionaron el modelo matemático-cognitivo que desarrollaron en sus investigaciones anteriores (lo que Anderson y su grupo llaman el modelo ACT-R 5.0). “Este artículo –dicen en la introducción de su trabajo– va a demostrar el potencial de los datos de las imágenes de resonancia magnética funcional (IRMf)” en la comprensión del proceso de resolver problemas complejos (Anderson , Qin, Sohn, Stenger y Carter, 2003, p. 241)[3].

¿Cuáles son las regiones corticales que pueden ser activadas durante la resolución de problemas? Puesto que la pregunta es demasiado amplia, estos investigadores se contentaron con estudiar el caso de la resolución de ecuaciones. Esta simplificación reduce la posibilidad de las regiones corticales implicadas; Anderson y sus colaboradores decidieron estudiar tres:

- La *corteza prefrontal* a menudo se asocia con el acceso a la información y las operaciones para determinar objetivos (el *¿qué hacer?* en un problema).
- Ciertas regiones del cerebro que pueden sostener las imágenes necesarias en la manipulación de la representación visual al solucionar una ecuación. Los trabajos en neurociencia sobre imágenes espaciales habían mostrado que la *corteza parietal posterior* se activa generalmente en situaciones de imágenes espaciales. En consecuencia, Anderson y su equipo decidieron analizar esta región cerebral.
- Por último, debido a que los sujetos debían responder haciendo uso de su índice derecho, las partes generalmente asociadas con el movimiento tienen que ser activadas en principio. En consecuencia, Anderson y su equipo se interesaron en la *corteza motora*.

El artículo presenta los resultados de dos experimentos. En el primero, se mostró a cada uno de los individuos (8 en total, 4 hombres y 4 mujeres), con edades entre 19 y 23 años (media 21.5 años), una serie de tres dígitos que sería mostrada durante 3 segundos en la pantalla de una computadora. A continuación, la serie desaparecía para dar paso a una ecuación, que fue presentada durante 7.5 segundos. Mientras tanto, los sujetos tenían que hallar mentalmente la solución e indicarla; si una solución no había sido proporcionada durante 7.5 segundos, el resultado de la prueba se consideraba como incorrecto.

Luego, la ecuación era sustituida por un asterisco que permanecía en la pantalla durante 7.5 segundos (periodo de descanso). Posteriormente, el asterisco

[3] La técnica IRMf consiste en registrar los cambios relacionados con las funciones del tejido cerebral. Se basa en las propiedades magnéticas de los tejidos y permite obtener información sobre la estructura y función del cerebro. La IRMf es sensible al aumento de la sangre que se asocia con la activación neuronal. Cuando las neuronas se activan, el flujo de sangre de la región activada aumenta.

era sustituido por un signo “+”, el cual se mostraba durante 3 segundos para indicar la proximidad de la siguiente prueba. Durante cada ensayo (es decir, en cada repetición de la experiencia de solucionar una ecuación), los investigadores tomaron 14 escanografias, con una duración de 1.5 segundos cada una.

Como era de esperarse, los investigadores identificaron una activación relevante en las tres regiones investigadas y citadas arriba (estas regiones se muestran en la figura 11).

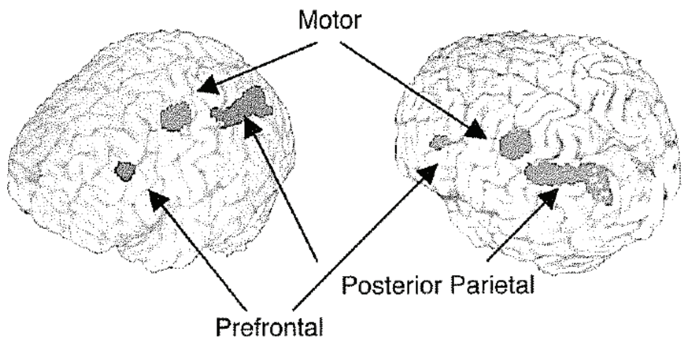


Figura 11. Sectores de las regiones prefrontal, parietal y motriz significativamente activadas en la solución de ecuaciones (Anderson, Qin, Sohn, Stenger y Carter, 2003, p. 247).

Ahora bien, ¿este patrón de activación es característico de la solución de ecuaciones que se encuentran en el álgebra escolar, o va más allá de las ecuaciones escolares tradicionales? En el segundo experimento, hecho con 8 participantes de una edad media de 20.6 años, los investigadores cambiaron las ecuaciones algebraicas por ecuaciones aún más abstractas (aquellas en las que los operadores se definen arbitrariamente, como se hace en el álgebra abstracta). Los resultados mostraron una activación similar en las áreas que pertenecían a la corteza prefrontal, parietal y motriz.

Los autores plantean en las conclusiones una interesante hipótesis que considera el efecto de la práctica de la solución de ecuaciones en el cerebro: con la práctica, las etapas de acceso y de recuperación de la información deberían resultar más fáciles. En razón de la práctica, la actividad en regiones cerebrales asociadas con el acceso a la información (la región prefrontal) debería, en principio, ser menor. Al contrario, la activación de la región parietal vinculada con las imágenes visuales, que se genera al simplificar las ecuaciones, debería mantenerse más o menos constante (Anderson, Qin, Sohn, Stenger y Carter, 2003, p. 260). Esta hipótesis ha dado lugar al problema de la edad óptima para aprender álgebra, y ocupa el interés central de los trabajos dirigidos por uno de los colaboradores de Anderson: Yulin Qin.

5.3. *La segunda serie*

Qin, Carter, Silk, Stenger, Fissell y Goode, et al. (2004) colocaron un pequeño anuncio en un periódico local de Pittsburg para invitar a los alumnos que no habían aún estudiado cursos de álgebra a participar en una investigación. Qin y sus colegas lograron reclutar a seis sujetos que tenían como lengua materna el inglés, sus edades oscilaban entre 12 y 15 años (edad media de 13.1 años) y estaban cursando grados escolares del sexto al octavo. La distribución en términos de género era de tres muchachos y siete muchachas. La experiencia duró cinco días y las escanografias del cerebro (IRMf) fueron tomadas en la primera y segunda jornada[4].

Los resultados de Qin y de su equipo concuerdan perfectamente con los que obtuvieron Anderson y sus colaboradores en su investigación del 2003. Las partes activadas en el cerebro de los sujetos jóvenes correspondían a las que se activaban en tareas similares efectuadas por los adultos; es decir, a los sectores localizados en la región prefrontal, la región parietal izquierda y las regiones motriz y sensorial izquierdas.

Cuando Qin y sus colaboradores hicieron la comparación de la tasa de éxito en la resolución de ecuaciones de los adultos y de los adolescentes, no pudieron hallar diferencias. De igual manera, notaron que tanto en los adultos como en los adolescentes la actividad en la región prefrontal había disminuido tras cuatro días de práctica. Sin embargo, identificaron un *resultado intrigante*: a diferencia de los adultos, los jóvenes, después de una práctica en la resolución de ecuaciones, mostraron una disminución de su *actividad cerebral parietal*.

Puesto que los sectores parietales que se activan están generalmente correlacionados con la elaboración mental de la imagen de la ecuación –que es vital para simplificarla, sobre todo al inicio del aprendizaje del álgebra–, dichos resultados sugieren que con la práctica los adolescentes recurren menos a formarse

[4] Para asegurar la validez de la comparación entre adolescentes y adultos, los investigadores, siguieron la misma metodología en ambos grupos (por ejemplo, experimentación de 5 días con una misma forma práctica, y escanografias tomadas en la primera y la segunda jornada). Ver Qin, Sohn, Anderson, Stenger, Fissell y Goode, et al. (2003), y Qin, Carter, Silk, Stenger, Fissell y Goode, et al. (2004).

una imagen de la ecuación, en comparación con los adultos. El proceso de resolución descansaría más en un cálculo mecánico de las operaciones sucesivas. Así, los adolescentes accederían más fácilmente que los adultos a nuevos niveles de abstracción algebraica.

En sus conclusiones, Qin y sus colaboradores señalan el punto siguiente: “la receptividad más grande del cerebro de los adolescentes a la práctica sugiere que este periodo [la adolescencia] sería más apropiado para la enseñanza del álgebra” (Qin et al., 2004, p. 5691).

Beatriz Luna comenta esos resultados de la forma siguiente:

> Los resultados IMRf [es decir, de la imaginería por resonancia magnética funcional] indican que hay en los adolescentes un decrecimiento en su dependencia enfrente del módulo imaginería/parietal después de haber practicado (“aprendido”) las ecuaciones algebraicas, mientras que los adultos dependen aún de este módulo, incluso después de la práctica. Estos resultados son muy intrigantes, pues ellos parecen sugerir que, como adultos, estaríamos limitados en nuestra habilidad de “aprender” las operaciones mentales que subtienden este nivel de resolución de problemas (Luna, 2004, p. 438)[5].

Nuestra investigación en el salón de clases (Radford, 2008; Radford, Demers y Miranda, 2009) muestra que, si las actividades de introducción al álgebra son bien elegidas, los alumnos de séptimo grado pueden comenzar a utilizar sin grandes dificultades el lenguaje algebraico simbólico para resolver ecuaciones y problemas de generalización de patrones (modelación). Asimismo, nuestras investigaciones en curso sugieren que, aunque los conceptos algebraicos pueden ser introducidos desde el segundo grado (7-8 años), sin recurrir al simbolismo algebraico, los alumnos de quinto grado (10-11 años) podrían ya a comenzar a ser introducidos al lenguaje algebraico simbólico (ver también Brizuela & Schliemann, 2004).

De manera contraria a lo que pasa en otros países, en Ontario la resolución de problemas por métodos algebraicos simbólicos comienza en el noveno grado. Por tanto, es pertinente formularse la pregunta de si debemos esperar tanto tiempo para introducir el álgebra con letras a los alumnos. Los resultados experimentales en el salón de clases y los trabajos en neurociencia sobre el cerebro sugieren que hay

---

[5] Notemos, sin embargo, que Luna ofrece una segunda interpretación en la que según la cual la diferencia puesta en evidencia por Qin y su equipo podría ser causada por el hecho de que el cerebro del adolescente está aún en crecimiento, y que la disminución de la actividad parietal sería resultado de una suerte de compensación por los límites del contexto parietal de los jóvenes (Luna, 2004, p.438). Aunque plausible, esta hipótesis no nos parece convincente, pues si es cierta hallaríamos poca actividad parietal en los jóvenes desde el inicio.

beneficios importantes que pueden derivar al hacer una introducción temprana de esta materia en la escuela, no obstante su reputación de que es difícil comprenderla. Tal dificultad no provendría de una falta de madurez cognitiva o cerebral, sino de una inadecuación en los métodos de enseñanza utilizados.

6. Conclusiones

Desde el punto de vista educativo, la pregunta ineludible es saber qué se puede obtener de los resultados que ofrecen las investigaciones neurológicas. Como dijimos en la introducción, dicha pregunta ha comenzado realmente a ser tomada en cuenta hasta ahora; sin embargo, no tiene respuesta precisa. Una de las razones es que la neurología moderna es, históricamente hablando, una ciencia reciente cuyos avances dependen en forma estricta de los progresos tecnológicos. Pero más allá de la dimensión tecnológica, podemos pensar que una aplicación de los resultados neurológicos en educación deberá pasar por un diálogo sostenido (y probablemente por trabajos conjuntos) entre educadores y neurólogos. Esto no es más que el inicio[6].

Sin embargo, consideramos que podemos ya hacer algunas observaciones en torno a los aportes posibles de la neurociencia a la educación matemática. Discutiremos aquí cuatro puntos[7].

6.1. *La naturaleza del cerebro*

El primer resultado, que tiene un carácter más bien general, concierne a la información que la neurociencia aporta al problema de la *naturaleza* del cerebro. Se relanza el debate entre cerebro y pensamiento, mas lo coloca bajo un punto de vista nuevo. *¿El pensamiento no es en el fondo una conexión neurológica?* O bien, *¿el cerebro no es más que el substrato del pensamiento, uno de los elementos que, con otros artefactos culturales, lo mediatizan?*

---

[6] Mencionemos, en este orden de ideas, al Engrammetron, un laboratorio dirigido por Stephen Campbell que funciona en la Universidad Simon Fraser de Canadá. Este laboratorio se encuentra en la intersección de las ciencias neurológicas y la investigación en educación (Campbell, 2007).

[7] Las observaciones no incluirán las concernientes al caso bien conocido de usar los datos neurológicos para comprender problemas como la dislexia o la afasia, donde una justificación o explicación no parece necesaria.

6.2. *El cerebro y el desarrollo conceptual*

El segundo resultado atañe a la *relación* del cerebro con el desarrollo conceptual del saber y el desarrollo conceptual de los alumnos. Los estudios que se centran en la evolución histórica del cerebro (filogénesis) y su desarrollo durante el transcurso de la vida del individuo (ontogénesis) pueden enriquecer nuestro conocimiento sobre el desarrollo de los conceptos en el transcurso del tiempo (la epistemología histórica del saber), así como de los datos psicológicos y sociopsicológicos de la investigación sobre el aprendizaje.

Por ejemplo, Chochon, Cohen, Van de Moortele y Dehaene (1999) solicitaron a individuos que reconocieran, compararan, multiplicaran y sustrajeran números, a fin de determinar las regiones corticales activadas durante estas tareas. Los resultados de su trabajo indicaron una activación encajada de ciertas regiones corticales. Así, estos investigadores observaron que cuando los individuos comparan números, hay una activación en lo profundo de la hendidura postcentral derecha, que se añade a las partes ya activadas en la tarea de reconocer números. De manera similar, además de las partes ya activadas al hacer la comparación de números, la multiplicación provocó una fuerte activación de la hendidura interparietal izquierda. Finalmente, además de las partes ya activadas al hacer la multiplicación, la sustracción causó una mayor activación en el lóbulo prefrontal, de manera específica en ambas partes de la circonvolución frontal inferior y en la circonvolución del dorso-lateral prefrontal derecha, así como en la región anterior del surco interparietal derecho. Cada tarea mostró una activación adicional de ciertas regiones, en comparación con aquellas ya activadas durante tareas precedentes (figura 12).

Desde el punto de vista conceptual, no sorprende que la activación haya sido mayor cuando los sujetos comparaban números que cuando debían mencionar el nombre de los números presentados. Comparar números exige que se tomen en cuenta *dos* objetos y decidir su numerosidad. En cambio, varios investigadores podrían estar sorprendidos por el hecho de que, neurológicamente hablando, la sustracción parece ser más compleja que la multiplicación. Podemos también plantear la pregunta desde el punto de vista histórico: *en la historia de las matemáticas, ¿la sustracción fue desarrollada después de la multiplicación?*

Podemos resumir estas preguntas en la forma siguiente: *¿la complejidad neurológica implica una complejidad conceptual?* He aquí un ejemplo del resultado que produce la investigación neurológica, el cual nos lleva a una pregunta de orden psicológico, epistemológico y didáctico. Si no tenemos una respuesta, ¡tenemos por lo menos una buena pregunta!

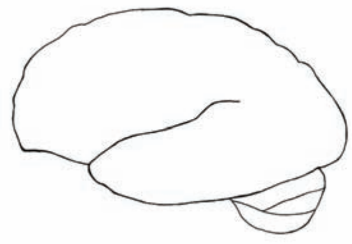
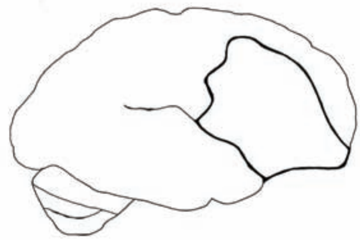
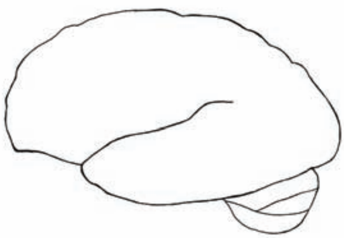
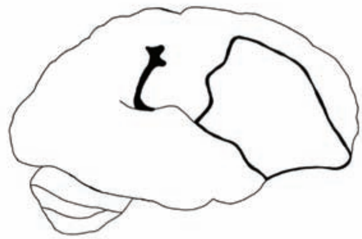
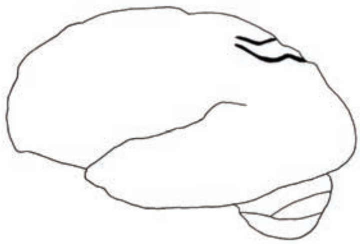
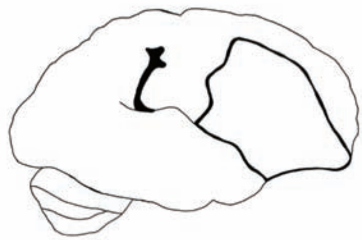
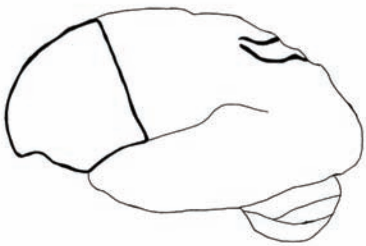
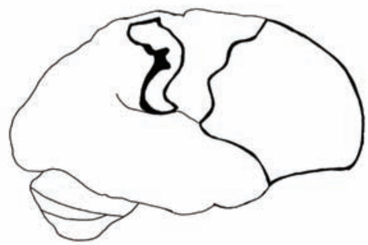
Tarea	Hemisferio izquierdo	Hemisferio derecho
Nombrar		
Comparar		
Multiplicar		
Sustraer		

Figura 12. Algunas regiones importantes activadas durante una tarea numérica, según Chochon et al. (1999).

6.3. *La plasticidad del cerebro*

Entre los problemas centrales de la enseñanza en general, y de la enseñanza de las matemáticas en particular, está determinar el momento oportuno del aprendizaje, ya que la formación de las conexiones neurológicas se realiza mejor cuando las conexiones solicitadas para hacer un aprendizaje se encuentran en un periodo de mayor plasticidad; es decir, antes de que estas conexiones hayan adquirido una cierta firmeza que luego será difícil modificar (Healy, 1991, p. 53).

Los riesgos de una intervención que ocurre más allá del momento oportuno para el aprendizaje quedan claramente demostrados por el destino desafortunado de los niños llamados *salvajes*, quienes han crecido al margen de la sociedad, con frecuencia en compañía de bestias. Uno de los casos más citados es el del salvaje de Aveyron (Itard, 1962; Newton, 2002). Tras haber sido atrapado en Rhodez, una ciudad entre Montpellier y Toulouse, Francia, en 1800, este niño de alrededor de 1.40 metros parecía más animal que humano. Sin saber hablar, el niño presentaba un comportamiento determinado por los instintos elementales de las funciones psicológicas de base.

Pierre-Joseph Bonaterre, profesor de historia natural en la Escuela Central de Aveyron, se dio a la tarea de estudiar al niño con detalle. Bonaterre indicaba que, más allá de las necesidades inmediatas, el niño no mostraba ningún signo de afección o de amistad hacia las personas que lo rodeaban. Esta indiferencia profunda le hizo creer que el niño estaba sordo, pero su reacción a ciertos sonidos (como el canto de los pájaros) lo llevó a pensar de otro modo. Bonaterre se dio entonces a la tarea de enseñarle a hablar, mas no tuvo éxito: el periodo de aprendizaje de la lengua estaba aparentemente terminado para este niño. Los esfuerzos hechos en París, donde el niño fue ubicado poco más adelante a fin de ser estudiado, no dieron buenos resultados. Itard dice: “se pensaba que la educación de este niño tomaría algunos meses y que después él podría informarnos sobre su pasado. En lugar de esto, ¿qué es lo que vimos? Un niño malo, afectado de un incesante movimiento como lo hacen ciertos animales, que muerden a aquellos que se oponen a ellos y que no muestran ninguna afección por aquellos que los cuidan” (Itard, 1962, p. 4). Podríamos decir que el tiempo de creación de las conexiones neurológicas necesarias para el desarrollo del lenguaje y de la afectividad había terminado para el niño de Aveyron[8].

[8] Olivier Houdé sugiere que un elemento importante en la adquisición del concepto de número es la posibilidad de inhibir ciertos comportamientos más o menos *naturales*, a fin de acceder a las conceptualizaciones más profundas. El pasaje a la conservación de la cantidad en las tareas piagetianas no consiste solamente en un desarrollo lógico, sino también en un aprendizaje que

Sin volverse necesariamente obsesivos por la pregunta sobre el momento oportuno del aprendizaje, el caso del niño de Aveyron recuerda que hay límites en la plasticidad del cerebro. Podemos, de manera legítima, formularnos la pregunta en torno a la pertinencia de dejar la enseñanza de métodos algebraicos en la resolución de ecuaciones para la escuela secundaria, cuando vemos que los resultados experimentales en didáctica de las matemáticas –apoyados en los trabajos neurológicos de Anderson, Qin y sus colaboradores– indican que ya hacia finales del séptimo grado (e incluso más pronto), los niños están listos para transitar hacia la abstracción algebraica.

Así, podemos enunciar la hipótesis de que las técnicas aritméticas de resolución mediante ensayos sistemáticos u operaciones inversas, que se motivan con frecuencia en la primaria, favorecerán conexiones neurológicas "aritméticas" que, aunque son potentes y deseables en su momento, resultarán difíciles de deshacer más adelante si son estimuladas por mucho tiempo. En efecto, al ser mantenidas por mucho tiempo, dichas técnicas no llegarán a ser ayudas susceptibles para realizar el pasaje de la aritmética al algebra, sino obstáculos para el aprendizaje de nuevos conceptos.

El caso del salvaje de Aveyron y de otros niños que han tenido el mismo destino nos recuerda también que un cerebro sano es una condición facilitadora de aprendizaje, pero en ningún caso es suficiente. Para adquirir en la escuela los conocimientos que la humanidad ha elaborado durante milenios se requiere más que un buen cerebro: *se necesita una cultura*. El lenguaje –el francés o el español, por ejemplo– no es producto exclusivo del cerebro. Como el neurocognitivista Bruce Wexler ha indicado recientemente:

> El lenguaje no es la propiedad del cerebro humano, sino más bien de la sociedad humana y de la cultura. Si todos los individuos perdieran de manera permanente el habla y se convirtieran en analfabetos, sus niños y las generaciones siguientes serían incapaces de hablar, a pesar del hecho de tener un cerebro normal; la especie humana perdería el lenguaje. Esta característica es la más distintiva de todas las características humanas (2006, p. 121).

Desde el punto de vista de la educación, no podemos obtener todo el potencial de la plasticidad del cerebro sin las condiciones pedagógicas que la cultura debe poner en su lugar para asegurar el pleno desarrollo del alumno.

---

inhibe una estrategia perceptiva inadecuada; por ejemplo, "número = longitud" (Houdé, 2004, p. 72). Podemos conjeturar que la inhibición, tanto a nivel del desarrollo intelectual como afectivo y social, no es algo que se aprende en cualquier momento, y que las formas culturales de inhibición más elementales comienzan a ser objetivadas desde el nacimiento.

6.4. *Una nueva concepción del pensamiento: la multimodalidad*

En gran medida, la enseñanza tradicional de las matemáticas hace que el alumno pase su tiempo en hacer ejercicios ocupando papel y lápiz, sentado en su pupitre. La información que hemos presentado en torno a la maduración del cerebro nos invita a tratar de concebir la enseñanza y el aprendizaje de manera diferente.

¿Cuál sería esa otra forma de enseñar y aprender matemáticas? Vittorio Gallese y George Lakoff sugieren que el saber conceptual (matemático y otro) es virtualmente encarnado (*embodied*); es decir, un saber unido de manera íntima al funcionamiento de nuestro sistema sensorio-motor (Gallese y Lakoff, 2005). Desde tal perspectiva, el sistema sensorio-motor no ofrece solamente la base o la infraestructura al contenido conceptual que el alumno desarrollaría más tarde, como supone la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget. El sistema sensorio-motor caracteriza de manera profunda el contenido semántico de los conceptos, "en términos de la manera que funcionamos con nuestro cuerpo en el mundo" (Gallese y Lakoff, 2005, p.456).

Una de las consecuencias de este nuevo enfoque, que va adquiriendo un lugar cada vez más predominante en las nuevas teorías del aprendizaje, es que pensamos no sólo con la ayuda del lenguaje y de los símbolos, sino también a través de los sentidos (Radford, 2009a, 2009b). En este sentido, Gallese y Lakoff sostienen que el pensamiento reposa en una articulación muy fina y sutil de impresiones sensoriales, al que llaman *carácter multimodal de los conceptos*.

Dicha idea, ya avanzada por el científico social Arnold Gehlen (1988) en los años 1940 (Radford, 2009a), puede ser ejemplificada a través del lenguaje. A primera vista, el lenguaje puede parecer una construcción conceptual alejada de los sentidos; sin embargo, como dicen Gallese y Lakoff, el lenguaje es multimodal porque integra varias modalidades: la vista, el sonido, el tacto, las acciones motrices, etc. Términos matemáticos como "número par" guardan, en su etimología, este aspecto sensorial que consiste en poder disponer manualmente del número en dos hileras iguales. Se sabe, por ejemplo, que en los pitagóricos y sus predecesores era habitual representar números con pequeñas piedras (Lefèvre, 1981). El número par (8, por ejemplo), era simbolizado por dos hileras iguales (ver figura 13, izquierda), pero un número impar no podía ser dividido en dos hileras iguales (ver figura 13, derecha)[9].

[9] Para otros ejemplos sobre la relación entre la expresión lingüística de conceptos matemáticos y su naturaleza sensorial, ver por ejemplo la etimología de los conceptos de ángulo y de circunferencia en el diccionario etimológico de Schwartzman (1994). Para el concepto de punto, que es una abstracción de la huella kinestésica dejada sobre una superficie por un compás, ver Vita (1982). Para el concepto

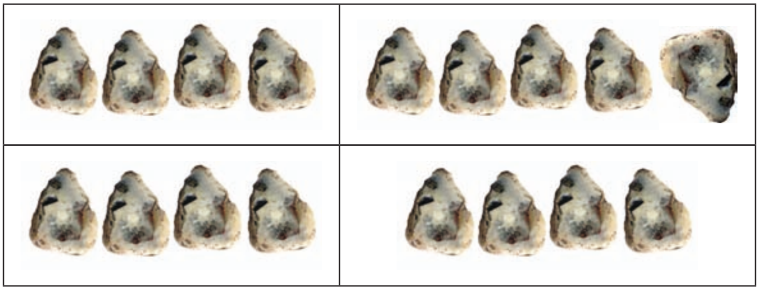


Figura 13. Representación de un número par (izquierda) y de un número impar (derecha).

Es interesante señalar que la multimodalidad del pensamiento se localiza en regiones cerebrales diferentes y, como dicen Gallese y Lakoff, ello parece ser la norma. En otros términos, "las modalidades sensoriales como la visión, el tocar o el oído están en realidad integradas mutuamente con el movimiento motor y la planificación" (Gallese y Lakoff, 2005, p.459)[10].

De este modo, hay una colaboración entre los diferentes sentidos que hace posible la aparición de conceptos abstractos (Radford, Bardini y Sabena, 1997), la cual no es propia de los humanos; también aparece en los monos grandes. El primatólogo Juan Carlos Gómez en sus investigaciones con chimpancés ha observado que "las representaciones visuales de los monos grandes son muy pronto coordinadas con patrones de información táctil y kinestésica. Ello desemboca en representaciones complejas de carácter multimodal de objetos" (Gómez, 2004, p. 33).

No obstante, parece que existe un límite en esta colaboración intersensorial de los monos grandes, ya que pueden reconocer que una cuerda tiene varias características importantes para alcanzar un objeto que está fuera de su alcance, como la longitud y la transportabilidad. Incluso, como las experiencias conducidas por Köhler (1951) mostraron, los chimpancés trataban de alcanzar un fruto fuera de su alcance con ayuda de una cuerda (figura 14). Sin embargo, los chimpancés no se dan cuenta de que, para alcanzar el fruto con una herramienta, ésta tiene que poseer la característica de *rigidez*. Ahora bien, la rigidez, como el peso, son experiencias táctiles y no visuales. Comparados con los otros primates, los órganos sensoriales humanos colaboran a niveles que son propios de la especie, de manera que aquello que se percibe se debe a una variedad de características sensoriales.

---

de multiplicación en tanto que fuerza física para transportar objetos de un lugar a un otro, ver Høyrup (2002).

[10] Otro trabajo que señala la importancia cognitiva de la multimodalidad y su distribución multiforme en la corteza cerebral es el de Saper, Iversen y Frackowiak (2000).

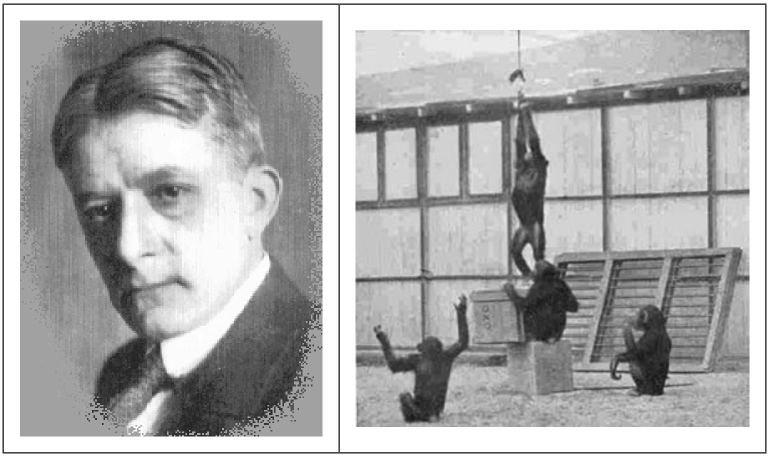


Figura 14. A la izquierda, Wolfgang Köhler; a la derecha, una foto extraída de su famoso libro The mentality of apes (1951).

Resulta claro que la coordinación sensorial influye en el aprendizaje de conceptos geométricos, como el círculo o el rectángulo. Si se sigue un contorno redondo con la mano y después un contorno anguloso, se *siente* y se *ve* una diferencia. En el caso del círculo, se especifica más tarde con el concepto de *objeto redondo,* y se vuelve a continuación más general cuando se describe el círculo mediante una expresión lingüística que recalca su sentido métrico: como conjunto de los puntos que se encuentran a una *misma distancia*, *r*, de un punto fijo (su centro), o a través de un simbolismo algebraico:

$$\left\{(x, y) / \sqrt{x^2 + y^2} = r\right\}$$

Puede ser que uno de los problemas con la enseñanza tradicional centrada en el papel y el lápiz es que no permite hacer conexiones durables con la experiencia sensorial vivida por los alumnos en sus primeros años escolares[11]. Por tanto, la fórmula aparece abstracta, sin fundamento y desprovista de *sentido*.

Estas observaciones no quieren decir que sugerimos una enseñanza de las matemáticas ligada a los sentidos. Se conocen muy bien los límites del empirismo como teoría del conocimiento y práctica pedagógica. Una de las fortalezas de las matemáticas reside precisamente en la abstracción que le permite hacer su lenguaje. El problema es que este lenguaje y los conceptos que expresa corren el peligro de permanecer sin ningún sentido, sin una propuesta pedagógica que asegure el paso a lo abstracto.

[11] Propósitos similares a estos son los de Arzarello, Bosch, Gascón, y Sabena (2008).

Agradecimientos

Este artículo proviene de una investigación subvencionada por el Conseil de recherches en sciences humaines du Canada / The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (CRSH/SSHRC) y el Ministère de l'éducation de l'Ontario- Direction des politiques et programmes d'éducation en langue française.

Los autores desean expresar su agradecimiento a José Guzmán Hernández e Isaias Miranda Viramontes por su valiosa ayuda en la traducción de este artículo.

Referencias bibliográficas

Anderson, J. R., Qin, Y., Sohn, M., Stenger, V. A. & Carter, C. S. (2003). An information-processing model for the BOLD response in symbol manipulation tasks. *Psychonomic Bulletin & Review 10* (2), 241-261.

Anderson, J. R., Reder, L. & Lebiere, C. (1996). Working memory: activation limitations on retrieval. *Cognitive Psychology 30*, 221-256.

Ansari, D., Fugelsang, J. A., Dhital, B. & Venkatraman, V. (2006). Dissociating response conflict from numerical magnitude processing in the brain: an event-related fMRI study. *NeuroImage 32*, 799-805.

Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J. & Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education 40*, 179-188.

Blessing, S. & Anderson, J. R. (1996). How people learn to skip steps. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition 22* (3), 576-598.

Brizuela, B. & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics 24* (2), 33-40.

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. London: Macmillan Publishers.

Campbell, S. (2007). The Engrammetron: establishing an educational neuroscience laboratory. *SFU. Educational Review 1*, 17-29.

Cantlon, J. F., Brannon, E. M., Carter, E. J. & Pelphrey, K. A. (2006). Functional imaging of numerical processing in adults and 4-y-old children. *PLOS Biology 4* (5), 844-854.

Caviness, V. S. J., Kennedy, D. N., Bates, J. F. & Makris, N. (1997). The developing human brain: a morphometric profile. In R. W. Thatcher, G. R. Lyon, J. Rumsey & N. Krasnegor (Eds.), *Developmental neuroimaging: mapping the development of brain and behavior* (pp. 3-14). Toronto, Canada: Academic Press.

Chochon, F., Cohen, L., Van de Moortele, P. F. & Dehaene, S. (1999). Differential contributions of the left and right inferior parietal lobules to number processing. *Journal of Cognitive Neuroscience 11* (6), 617-630.

Dehaene, S. (1997). *The number sense*. Oxford, UK: Oxford University Press.

Delazer, M., Domahs, F., Bartha, L., Brenneis, C., Lochy, A., Trieb, T. & Benke, T. (2003). Learning complex arithmetic-an fMRI study. *Cognitive Brain Research 18*, 76-88.

Devlin, K. (2005). *The math instinct. Why you're a mathematical genius (along with lobsters, birds, cats, and dogs)*. New York, USA: Thunder's Mouth Press.

Edwards, L., Radford, L. & Arzarello, F. (2009). Gestures and multimodality in the teaching and learning of mathematics *(Special Issue). Educational Studies in Mathematics 70* (2), 91-215.

Finger, S. (2004). Paul Broca: 1824-1880. *Journal of Neurology 251*, 769-770.

Gallese, V. & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: the role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology 22* (3/4), 455-479.

Gallistel, C. R. & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition 44,* 43-74.

Gehlen, A. (1988). *Man. His nature and place in the world*. New York, USA: Columbia University Press.

Gogtay, N., Giedd, J., Lusk, L., Hayashi, K., Greenstein, D., Vaituzis, A., Nugent, T., Herman, D., Clasen, L., Toga, A., Rapoport, J. & Thompson, P.(2004). Dynamic mapping of human cortical development during childhood through early adulthood. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 101*(21), 8174-8179.

Gómez, J. C. (2004). *Apes, monkeys, children, and the growth of mind*. Cambridge, USA: Harvard University Press.

Goswami, U. (2004). Neuroscience and education. *British Journal of Educational Psychology 74,* 1-14.

Grafman, J., Kampen, D., Rosenberg, J., Salazar, A. & Boller, F. (1989). Calculation abilities in a patient with a virtual left hemispherectomy. *Behavioural Neurology 2*, 183-194.

Healy, J. M. (1991). *Endangered minds: why children don't think and what we can do about it.* New York, USA: Touchstone.

Houdé, O. (2004). *La psychologie de l'enfant*. Paris, France: PUF.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces. A portrait of old babylonian algebra and its kin*. New York, USA: Springer.

Itard, J. M. G. (1962). *The wild boy of Aveyron*. New York, USA: Meredith Publishing Company.

Köhler, W. (1951). *The mentality of apes*. New York-London: The Humanities Press-Routledge & Kegan Paul.

Kosslyn, S. & Koening, O. (1992). *Wet mind: The new cognitive neuroscience*. New York, USA: The Free Press.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. New York, USA: Basic Books.

Lefèvre, W. (1981). *Rechensteine und Sprache*. Stuttgart, Germany: Klett-Cotta.

Luna, B. (2004). Algebra and the adolescent brain. *Trends in Cognitive Sciences 8* (10), 437-439.

Luria, A. (1966). *Higher cortical functions in man*. New York, USA: Basic Books.

Luria, A. (1973). *The working brain*. New York, USA: Basic Books.

Newton, M. (2002). *Savage girls and wild boys. A history of feral children*. London, UK: Faber and Faber.

Prochiantz, A. (1989). *La construction du cerveau*. Paris, France: Hachette.

Qin, Y., Carter, C. S., Silk, E. M., Stenger, V. A., Fissell, K., Goode, A. & Anderson, J.R. (2004). The change of the brain activation patterns as children learn algebra equation solving. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 101*(15), 5686–5691.

Qin, Y., Sohn, M., Anderson, J. R., Stenger, V. A., Fissell, K., Goode, A. & Carter, C.S. (2003). Predicting the practice effects on the blood oxygenation level-dependent (BOLD) function of fMRI in a symbolic manipulation task. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 100*(8), 4951-4956.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education 40* (1), 83-96.

Radford, L. (2009a). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics 70* (2), 111-126.

Radford, L. (2009b). Signs, gestures, meanings: elementary algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Sixth Conference of European Research in Mathematics Education. Lyon, France, Jan. 28th-Feb. 1, 2009* . Plenary lecture.

Radford, L., Bardini, C. & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: the multisemiotic dimension of student's algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education 38*, 507-530.

Radford, L. Demers & S. Miranda, I. (2009) *Processus d'abstraction en mathématiques*. Ottawa, Canada: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Saper, C. B., Iversen, S. & Frackowiak, R. (2000). Integration of sensory and motor function: the association areas of the cerebral cortex and the cognitive capabilities of the brain. In E. R. Kandel, J. H. Schwartz & T. M. Jessell (Eds.), *Principles of neural science* (pp. 349-380). Toronto, Canada: McGraw-Hill.

Savage-Rumbaugh, S. & Lewin, R. (1994). *Kanzi*. New York, USA: John Wiley.

Schwartzman, S. (1994). *The words of mathematics. An etymological dictionary of mathematical terms used in English*. Washington, USA: The Mathematical Association of America.

Sowell, E. & Jernigan, T. (1998). Further MRI evidence of late brain maturation: limbic volume increases and changing asymmetries during childhood and adolescence. *Developmental Neuropsychology 14* (4), 599-617.

Sowell, E., Thompson, P., Holmes, C., Jernigan, T. & Toga, A. (1999). In vivo evidence for post-adolescent brain maturation in frontal and striatal regions. *Nature Neuroscience 2* (10), 859-861.

Starkey, P., Spelke, E. & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition 36*, 97-127.

Ta'ir, J., Brezner, A. & Ariel, R. (1997). Profond developmental dyscalculia: evidence for a cardinal/ordinal skills acquisition device. *Brain and Cognition 35*, 184-206.

Tomasello, M. & Call, J. (1997). *Primate cognition*. New York, USA: Oxford University Press.

Tweed, D. B., Haslwanter, T. P. & Happe, V. (1999). Non-commutativity in the brain. *Nature 399,* 261-263.

Vita, V. (1982). Il punto nella terminologia matematica greca. *Archive for the History of Exact Sciences 27*, 101-114.

Wexler, B. E. (2006). *Brain and culture. Neurobiology, ideology, and social change*. Massachusetts, USA: MIT Press.

Willingham, D., T. & Lloyd, J. W. (2007). How educational theories can use neuroscience data. *Mind, Brain and Education 1* (3), 140-149.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature 358*, 749-750.

Weinberger, N. M. (2004). Music and the brain. *Scientific American 291* (5), 88-95.

Autores

Luis Radford. Université Laurentienne, Ontario, Canadá; Lradford@laurentian.ca

Mélanie André. Université Laurentienne, Ontario, Canadá; melanie.andre@utoronto.ca