CAPÍTULO VII

CALCULO MENTAL EN LA ESCUELA PRIMARIA

Cecilia Parra

"Cálculo mental" es una expresión que convoca no pocas imágenes y suscita adhesiones, rechazos, dudas y expectativas.

Para algunas personas, se asocia a la repetición memorística de las tablas; para otras representa una capacidad admirable que ostentan algunas personas. De cara a la cotidianidad, son muchas las situaciones vinculables al cálculo mental: la estimación de los gastos en una compra de supermercado para no exceder el dinero que se lleva, el cálculo de los ingredientes de una receta para el doble de personas o la preparación de un presupuesto global para una fiesta o salida, redondeando cantidades y precios, etcétera.

Estos ejemplos asocian cálculo mental con cálculo no exacto; sin embargo, hay situaciones en las que se requiere una respuesta exacta que, de todos modos, resolvemos mentalmente, ya sea porque disponemos del resultado memorizado (8 + 8), o nos es fácil y directo obtenerlo (215 x 10) o reconstruirlo por un procedimiento confiable, así para 34.000 + 19.000, es frecuente pensarlo como 34.000 + 20.000 – 1000.

Podemos constatar que son conocimientos permanentemente en "uso", y su practicidad puede ser un argumento a la hora de discutir su inclusión como contenidos a tratar en la escuela, respecto de los cuales habría que definir los objetivos a lograr.

En este artículo, aceptando la finalidad práctica buscaremos

Creemos pertinente diferenciar las demandas sociales y las demandas matemáticas, pero como es posible integrarlas en un enfoque global, postergaremos las propuestas específicas hasta haber completado nuestra argumentación.

Previamente resulta necesario aproximar definiciones de los términos que usaremos.

Algunas distinciones en el terreno del cálculo

Con frecuencia se oponen *cálculo escrito* y *cálculo mental.* En este sentido, queremos aclarar que la concepción de cálculo mental que vamos a desarrollar no excluye la utilización de papel y lápiz, particularmente en cuanto, por ejemplo, al registro de cálculos intermedios en un proceso que es, en lo esencial, mental.

Parece más neta y fundamental la distinción entre el cálculo en el que se emplea de modo sistemático un algoritmo [1] único, sean cuales fueren los números a tratar y el cálculo en el que, en función de los números y la operación planteada, se selecciona un procedimiento singular adecuado a esa situación, y que puede no serlo para otra.

El primero suele denominarse *cálculo automático* o *mecánico,* y se refiere a la utilización de un algoritmo o de un material (contador, regla de cálculo, calculadora, tabla de logaritmos, etcétera.).

El segundo es llamado *cálculo pensado* o *reflexionado.* Es en proximidad con este significado que vamos a considerar el cálculo mental.

Entenderemos por *cálculo mental* el conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan, sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados.

Los procedimientos de cálculo mental se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal y en las propiedades de

1. Se entiende por *algoritmo* "una serie finita de reglas a aplicar en un orden determinado a un número finito de datos para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedades) en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos" (Bouvier, citado en Castro Martínez y otros, 1989).

las operaciones, y ponen en juego diferentes tipos de escritura de los números, así como diversas relaciones entre los números.

Para muchas personas cálculo mental se asocia con cálculo rápido. En la perspectiva que adoptamos, la rapidez no es una característica ni un valor aunque pueda ser una herramienta en situaciones didácticas en las que, por ejemplo, les permita a los alumnos distinguir aquellos cálculos de los que disponen los resultados en memoria de los que no.

No estamos proponiendo reemplazar o descartar el cálculo escrito y exacto en el que se utilizan algoritmos. Todos los niños deben poder realizar cualquier cálculo escrito que se les proponga.

Los algoritmos tienen la ventaja de poder aplicarse mecánicamente sin reflexionar a cada paso. En cambio, pueden ser muy pesados de realizar en algunas situaciones. En tales casos, es conveniente que los alumnos sepan usar otros recursos como las calculadoras y computadoras.

El hecho de que los algoritmos se lleguen a automatizar no significa que para su aprendizaje se sacrifique la comprensión.

Volveremos sobre estos aspectos más adelante.

Una aproximación histórica

Las distinciones realizadas no son definiciones asépticas ni son independientes del enfoque general que asumimos.

Consideramos que para caracterizar un enfoque es conveniente, incluso necesario, ubicarlo en una perspectiva histórica, ya que las reflexiones sobre las teorías y las prácticas son uno de los motores de la evolución de las concepciones.

Trataremos de reseñar brevemente cómo se ha considerado la enseñanza del cálculo (y el cálculo mental en particular) bajo la influencia de diversas concepciones pedagógicas.

El dominio de las cuatro operaciones básicas constituía un pilar de la llamada escuela tradicional. Se realizaban sistemáticamente ejercicios destinados a memorizar resultados de cálculos numéricos. Eran valoradas positivamente la eficacia y la velocidad en el cálculo (cálculo rápido).

definir sus límites hoy, en la sociedad actual, pero sobre todo intentaremos desarrollar argumentos relativos a una demanda matemática para la enseñanza del cálculo mental en la escuela, buscando definir su relación con otros aspectos centrales del aprendizaje de la matemática. Será necesario además ser explícitos en cuanto a la perspectiva didáctica desde la cual defendemos la enseñanza del cálculo mental en la escuela, ya que el sentido de esta inclusión tiene marcadas diferencias respecto del que cobraba en prácticas escolares previas. Dicha perspectiva didáctica incluye la provisión de orientaciones para el trabajo y la discusión entre maestros, así como sugerencias para el tratamiento del cálculo mental en clase.

Las demandas sociales actuales

Cuando la educación primaria se extiende a una franja más amplia de la sociedad, se definen tres capacidades básicas que todos los alumnos deben adquirir: leer, escribir y calcular. Esto se consideraba suficiente para los requerimientos laborales de la mayoría y los más elevados niveles de conocimientos se reservaban para unos pocos.

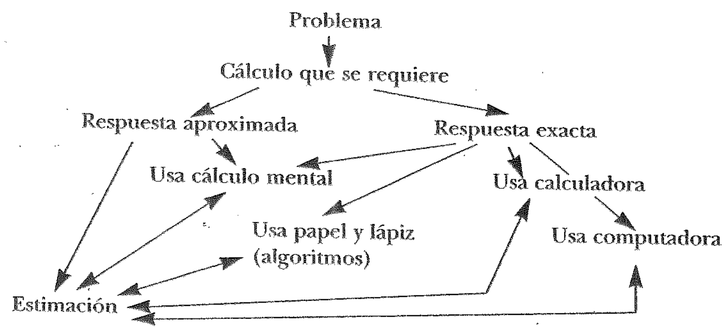
La concepción tradicional sobre lo que significa competencia matemática básica de los trabajadores ha sido ampliamente rebasada por las cada vez más altas expectativas de habilidades y conocimientos que plantea la difusión mundial de la tecnología.

La capacidad para resolver problemas, tomar decisiones, trabajar con otros, usar recursos de modo pertinente, forman parte del perfil reclamado por la sociedad de hoy. (Teniendo en cuenta que el mundo enfrenta una crisis de gravedad, entre otros aspectos por la falta de trabajo para millones de personas, las capacidades mencionadas no parecen perder valor, aun desde una perspectiva no ingenua.)

Desde distintas perspectivas se afirma que el centro de la enseñanza de matemática debe ser la resolución de problemas. Al mismo tiempo parece evidente que la capacidad progresiva de resolución de problemas demanda un creciente dominio de recursos de cálculo.

En este sentido, responder a la demanda social plantea una aproximación al cálculo que haga a los alumnos capaces de elegir los procedimientos apropiados, encontrar resultados y juzgar la validez de las respuestas.

Estas decisiones pueden esquematizarse del siguiente modo (National Council of Teachers of Mathematics):



Este esquema sugiere que la estimación puede y debe ser usada junto con los procedimientos con los que se produce la respuesta, de modo de anticipar, controlar y juzgar la razonabilidad de los resultados.

Aunque más adelante daremos definiciones más precisas, queremos aclarar que la concepción de cálculo mental que vehiculizamos incluye la estimación como uno de sus procesos y funciones.

Aun si nuestra argumentación se apoyara sólo en la demanda social, ya esta perspectiva hace aparecer aspectos que no suelen estar presentes como objetivos a lograr en las prácticas actuales de enseñanza. Nos referimos, por ejemplo, a la discusión sobre la pertinencia de un recurso ante una situación, la práctica de la estimación, la asunción, por parte de los alumnos, del control sobre sus procesos y resultados, etcétera.

En estos aspectos están comprometidos conocimientos pero también actitudes y valores, y estamos convencidos de que su logro debe ser asumido a través de la definición de objetivos y actividades específicas.

El desarrollo de nuevas ideas pedagógicas, particularmente las vinculadas a la escuela activa, comenzó a poner en cuestión, al menos en el discurso educativo, ciertas prácticas calificadas de rutinarias y pasivas. La memoria se desvaloriza al enfrentar el problema que empieza a ser crucial: la comprensión. Estos dos aspectos aparecen como antagónicos.

La reforma de la Matemática Moderna, originada en el intento de hacer ingresar en la escuela el gran desarrollo que la disciplina había tenido, no logró conmover mayormente la importancia otorgada al cálculo escrito (aunque lo aisló de la resolución de problemas), pero sí provocó el olvido, la desconsideración del cálculo mental. Esto puede haberse debido, como lo plantea el equipo ERMEL, a que nociones nuevas (conjuntos, relaciones...) ocuparon tiempo y cobraron importancia en las clases, pero también es adjudicable a una insuficiencia de la reflexión que no permitió explicitar otros objetivos más que el simple dominio de reglas.

La trasposición a la escuela de los primeros aportes de la teoría de Piaget (ya que los desarrollos posteriores tuvieron escasa difusión) puso énfasis en los aspectos estructurales del pensamiento a despecho de los aspectos procedimentales. Algunos autores argumentaban directamente en contra de los aprendizajes procedimentales.

En nuestro país, la difusión de los trabajos de Monserrat Moreno y Genoveva Sastre produjo un centramiento en el problema de la representación y la construcción del significado de los signos aritméticos, desdibujándose la importancia del dominio de hechos y relaciones numéricas.

Ya ha sido señalado en múltiples publicaciones (Brun, 1980; Coll, 1982) que esta acrítica trasposición de aportes psicológicos produjo una disolución de la especificidad de los contenidos del conocimiento (problema que ha sido y es fuente de múltiples investigaciones), un desdibujamiento de la función de la escuela como transmisora de saberes y una disminución de la confianza en el rol del maestro.

Los momentos reseñados pueden mirarse como dominados por antagonismos (memoria-comprensión, significado-técnicas, hasta la enseñanza y el aprendizaje parecían antagónicos) que no son tales desde un enfoque más inclusivo.

ALGUNOS APORTES QUE PERMITEN HOY UNA NUEVA PERSPECTIVA

Mencionaremos en primera instancia aporte de la psicología, y luego señalaremos los rasgos centrales del planteo didáctico actual.

En los últimos veinte años, numerosos investigadores se han interesado por conocer los procedimientos de los niños al resolver las primeras adiciones y sustracciones y, sobre todo, cómo evolucionan los procedimientos durante el período escolar hasta la adultez.

Groen y Parkman (citados por Fayol), para estudiar la resolución mental de adiciones simples, consideraron a priori que estas operaciones podían ser abordadas según dos grandes categorías de procedimientos. El primero consistiría en recuperar directamente en la memoria a largo plazo los resultados (por ejemplo, 6 para 4 + 2); se trataría entonces de un método *reproductivo*. El segundo exigiría una reconstrucción del resultado por medio de un cálculo; el procedimiento sería *reconstructivo*.

Fayol (1985), en un trabajo de síntesis del conjunto de estas investigaciones, plantea que está bien probado

> que los niños utilizan sistemáticamente, al menos en primer grado e incluso en avance, un procedimiento espontáneo para la resolución de adiciones simples: procedimiento que se apoya en el conteo y, en particular, en el incremento uno a uno.

En cambio, los adultos,

> confrontados a adiciones o multiplicaciones que involucran números de 0 a 10, proceden a una recuperación directa en la memoria a largo plazo de los resultados. [...]
>
> Ashcraft y Fierman (1982) estudiaron el período de transición en el curso del cual se efectúa el pasaje del método *reconstructivo* al método *reproductivo* y lo ubican entre 1º grado y la finalización de la primaria. A la altura de 3º grado los niños se dividen claramente en dos subgrupos: por un lado, los que se comportan como los alumnos de 1º y por otro los que actúan como los mayores.
>
> La necesidad de un recurso gradual y cada vez más frecuente a la recuperación directa en la memoria a largo plazo se concibe actual-

mente como el resultado del carácter muy limitado de la capacidad de tratar información. Se ha constatado, en efecto, que la memoria de trabajo (o memoria a corto plazo) no puede contener y tratar más que un número restringido de elementos durante un tiempo relativamente breve. Esto se verifica aún más en los más pequeños que disponen a la vez de una capacidad menos extendida y de menor velocidad de tratamiento. [...] La fragilidad de la memoria de trabajo, el hecho de que se encuentra muy rápidamente sobrecargada, incluso en el adulto, obligan al sujeto humano a apelar al máximo a la memoria a largo plazo que se caracteriza por una capacidad casi ilimitada.

Estas constataciones han planteado el problema de la *organización* en memoria de las informaciones numéricas. A partir de las investigaciones realizadas con adultos se buscó saber si la representación mental de los números en los niños tiene la misma organización. Más precisamente, se buscaba saber si la adquisición de nuevas operaciones entrañaba modificaciones en la estructuración en memoria de datos numéricos.

Los trabajos de numerosos psicólogos tienden a mostrar que hay una evolución en relación con la práctica escolar de las operaciones.

Por otra parte, los trabajos concernientes a la memoria a largo plazo condujeron a los psicólogos a emitir la hipótesis de una representación analógica de los números. Según Fayol, "se trataría de una suerte de línea mental numérica sobre la que intervendrían efectos ligados a la distancia simbólica". Por ejemplo, $5 + 3 = 14$ es más rápidamente considerado falso que $5 + 3 = 9$. Las comparaciones llevan menos tiempo cuando los términos ocupan posiciones distanciadas los unos respecto de los otros.

La representación de la serie numérica en la memoria a largo plazo tendría grandes similitudes en el niño y en el adulto. Poco a poco, en función del desarrollo y de la práctica escolar, esta representación se complejiza y se organiza en una "red mental".

Fayol señala que la evolución se caracteriza por un recurso cada vez más frecuente al almacenamiento en memoria de hechos numéricos (resultados disponibles que es suficiente recuperar tal cual), por una automatización creciente de algoritmos de resolución, pero también por una flexibilidad adquirida en la utilización de diversas estrategias disponibles.

Pocas investigaciones se han efectuado sobre el cálculo mental en el marco escolar. Sin embargo, ciertos trabajos hacen planteos a ser considerados en la práctica educativa.

Fisher (1987) sostiene que

> Sólo una automaticidad —o, en todo caso, un proceso reproductivo más que un proceso reconstructivo— al evocar hechos numéricos conducirá a los alumnos a estimar los órdenes de magnitudes y remarcar ciertos errores obtenidos con calculadoras o computadoras, es decir, a ejercer un control mínimo.

Plantea, retomando los resultados de Posner (1978),

> que una activación automática es muy económica en la medida en que no solamente es rápida sino también no consciente, sin esfuerzo, y no interfiere con la actividad mental en curso.

Algunos autores han llegado a la conclusión de que niños sin problemas desde el punto de vista cognitivo pero que tienen dificultades en matemáticas, muestran particulares dificultades en la asimilación de hechos numéricos. En este sentido, y considerando que (Resnick, 1983) las habilidades procedimentales no son incompatibles con la comprensión sino que podrían incluso subyacer a ella, surgen reflexiones sobre el papel de la escuela en estos aprendizajes. Fisher plantea que es por un trabajo regular y sistemático, y no por el azar de algunos cálculos no intencionales y no controlados, que los alumnos arribarán al dominio requerido. Como producto de sus investigaciones este autor subraya, entre otras conclusiones, que los alumnos fracasan mucho en las sustracciones y que tienen grandes dificultades para "el pasaje de la decena". Al analizar los libros escolares encuentra muy baja o nula presencia de ejercitaciones relativas al pasaje de la decena y señala, apoyándose en trabajos de Leontiev que un aprendizaje muy tardío hace perdurar procedimientos muy costosos e inoportunos, por lo cual recomienda la inclusión del aprendizaje de procedimientos de cálculo mental en la escuela.

Muchas de las antinomias y polarizaciones planteadas en la reseña histórica fueron resignificadas en los planteos didácticos que se desarrollaron en los últimos 20 años.

Las didácticas de área se han constituido a partir del reconocimiento de la especificidad de los contenidos en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Aunque hayan alcanzado diversos niveles de desarrollo comparten algunos rasgos.

Se centran en el estudio de los procesos de transmisión y adquisición de los contenidos de cada disciplina, particularmente en situación escolar. Buscan incluir los conocimientos que los alumnos elaboran fuera de la escuela pero subrayan, a la vez, que sin la acción sistemática de la escuela no es posible para los sujetos adquirir y estructurar adecuadamente los diversos campos de conocimiento.

Reconocen la originalidad y complejidad de los procesos de enseñar y aprender, y para su estudio se sitúan en un marco sistemático centrado sobre tres componentes fundamentales: el saber —el alumno—, el maestro y las relaciones que sustentan.

La Didáctica de Matemática, en particular, ha tenido un fortísimo desarrollo que no es posible sintetizar aquí. De hecho es intención de la totalidad de este libro acercar algunos de sus planteos actuales.

Mencionaremos solamente dos de sus planteos básicos para luego retornar al objeto de este artículo, el cálculo mental.

> ...es principalmente a través de la resolución de una serie de problemas elegidos por el docente que el alumno construye su saber, en interacción con otros alumnos (Charnay, véase el capítulo 3).

> Nuestra hipótesis de base plantea la actividad reflexiva del alumno sobre sus producciones y sus conocimientos, más precisamente sobre sus significados y relaciones (Brousseau, véase el capítulo 4).

El cálculo mental en particular ha sido poco teorizado, y es mucho lo que queda por investigar en cuanto a su rol en la construcción de los conocimientos matemáticos. Sin embargo, creemos que el trabajo en este terreno permite inscribir algunos rasgos importantes del enfoque didáctico actual, aspectos que serán

explicitados en las hipótesis y propuestas que presentamos a continuación.

¿Por qué enseñar cálculo mental en la escuela primaria?

Nuestras hipótesis didácticas principales son:

1. *Los aprendizajes en el terreno del cálculo mental influyen en la capacidad para resolver problemas*

Ante un problema, los alumnos tienen que construirse una representación de las relaciones que hay entre los datos y de cómo, trabajando con estos datos, podrán obtener nueva información, responda ésta a una pregunta ya formulada o formulable por ellos mismos.

El enriquecimiento de las relaciones numéricas a través del cálculo mental favorece que los alumnos, ante una situación, sean capaces de modelizarla, por anticipación, por reflexión.

Los maestros, a través de su experiencia, constatan que hay alumnos que ante un problema son capaces de establecer relaciones entre los datos, anticipar su comportamiento, controlar el sentido de lo que obtienen. Otros alumnos, en cambio, intentan aplicar un algoritmo tras otro sin poder hacer ninguna previsión y sin poder argumentar por qué hacen una elección.

Estamos convencidos de que las capacidades a que nos referimos pueden generalizarse si las asumimos como objetivo de enseñanza, para lo cual el cálculo mental tiene un rol preferencial.

Apuntamos, entre otras cosas, a que los alumnos puedan establecer relaciones numéricas y sacar conclusiones a partir de esas relaciones. Por ejemplo, si planteamos este problema:

El kilo de pesceto cuesta 6,85 $.
3/4 kilo de pesceto, ¿puede costar aproximadamente 3 $?

Este es un problema que se responde con una afirmación o una negación, posible de ser determinada a partir de un análisis de los datos. Concretamente, los alumnos pueden pensar que 1/2 kilo ya cuesta algo más que 3 $, por lo tanto 3/4 deben costar bastante más. (incluso pueden estimar que tiene que costar más que 4,5 $).

En este ejemplo no se requiere un cálculo exacto para dar la respuesta y son muchas las situaciones en las que es suficiente trabajar sobre las relaciones y aproximar para responder al problema.

A la vez, con un trabajo así apuntamos a que los alumnos aprendan a establecer este tipo de relaciones para que tengan medios de control ante las situaciones en que utilizan algoritmos y buscan respuestas exactas.

El enriquecimiento de relaciones numéricas se refiere también a que los alumnos puedan "pensar" un número desde distintas descomposiciones (y no sólo 243 = 2c + 4d + 3u).

Por ejemplo, 24 puede, según las situaciones o cálculos a resolver, ser considerado como:

20 + 4, si hay que dividirlo por 4, por 2 o por 10;
12 y 12, si hay que tomar la mitad;
25 – 1, si hay que multiplicarlo por 4;
21 y 3, si se quiere saber qué día de la semana será 24 días más tarde;
próximo a 25 %, si se quiere hacer una estimación en un problema de porcentaje;
6 x 4, si se quiere prever cuántos paquetes de 6 jabones se pueden armar;
etcétera.

Nos estamos refiriendo a un análisis de los números que puede ser piloteado desde el significado de los datos en el contexto de la situación o desde las facilitaciones que aporta al cálculo o a su control.

Las relaciones numéricas que los alumnos son capaces de establecer intervienen, sin duda, en el tratamiento de los datos del problema y comprometen el significado de las situaciones. Sin embargo, en la actualidad, resulta muy difícil precisar esa relación, aunque "puede avanzarse, por lo menos, en la dirección de proveer a los alumnos recursos de control y de análisis sobre sus producciones" (véase el capítulo 6, de I. Saiz).

Con frecuencia se escucha decir que "los alumnos no razonan", generalmente refiriéndose a las dificultades que tienen con la resolución de problemas.

Es mucho lo que hay que hacer para poder revertir esta situación. No pretendemos en este trabajo una respuesta cabal ni queremos que se sobrestime el cálculo mental, ya que no es una panacea.

Sí intentamos desarrollar la idea de que se puede proponer a los alumnos *razonar* sobre los cálculos, y que esto influye sobre su capacidad para resolver problemas, además de permitirles avanzar en dirección a aprendizajes matemáticos más complejos, aspecto al que nos referiremos enseguida.

2. *El cálculo mental acrecienta el conocimiento en el campo numérico*

Para nuestro enfoque, las nociones matemáticas (los números, las operaciones) deben aparecer, en principio, como herramientas útiles para resolver problemas. Sólo entonces estas herramientas podrán ser estudiadas en sí mismas, tomadas como objeto.

En este sentido, las actividades de cálculo mental proponen el cálculo como objeto de reflexión, favoreciendo la aparición y el tratamiento de relaciones estrictamente matemáticas.

Por ejemplo, cuando en distintos grados se propone buscar la manera más rápida de resolver mentalmente cálculos como los siguientes, aparecen, entre otros, procedimientos que ponen en juego las propiedades de las operaciones.

5 + 3 + 4 + 7 + 6 =	4 x 19 x 25 =
5 + 10 + 10 = 25	19 x 100 = 1900
125 + 95 =	9 + 7 =
(125 – 5 + 95 + 5)	(9 + 1 + 7 – 1)
120 + 100 = 220	10 + 6 = 16

Dichas propiedades permanecen en principio implícitas, y más tarde serán reconocidas y formuladas.

Dijimos antes que los alumnos pueden ser invitados a "razonar" sobre los cálculos. Veamos un ejemplo. La consigna es la siguiente:

"Escribir, sin hacer las cuentas, el signo que corresponde: >, < o ="

47 + 28 ... 47 + 31	77 – 31 ... 71 – 37
24 + 75 ... 25 + 74	145 – 68 ... 145 – 74

Se busca provocar razonamientos del siguiente tipo:
"77 – 31 es mayor que 71 – 37 porque a un número más grande le estoy restando uno más chico."
"145 – 68 es mayor que 145 – 74 porque al mismo número le estoy restando menos."

A nivel de 4º grado puede plantearse, por ejemplo, ¿cuál es el número de cifras del cociente de 35.842 ÷ 129?

Se busca que los niños produzcan razonamientos del siguiente tipo:
"Tiene que tener más de 2 cifras porque 129 x 100 = 12.900, (100 es el menor número de 3 cifras) y este número es inferior al dividendo, y tiene que ser menor que 1000 ya que 129 x 1000 es 129.000, y este número supera al dividendo. Por lo tanto, el número de cifras del cociente debe ser necesariamente 3 ya que está comprendido entre 100 y 1000."

Frecuentemente, al realizar divisiones, los niños olvidan poner los ceros intermedios del cociente, y esta estimación previa del resultado puede ayudarlos a controlar autónomamente sus operaciones sin necesidad de recurrir al maestro. [2]

Con actividades de este tipo se busca que los alumnos encuentren un modo de hacer matemática que no se reduzca a usar algoritmos y producir resultados numéricos, sino que incluya analizar los datos, establecer relaciones, sacar conclusiones, ser capaces de

2. El ejemplo ha sido tomado de la fundamentación de cálculo mental elaborada por Irma Saiz para el programa de Matemática de la provincia de Corrientes.

fundamentarlas, probar lo que se afirma de diversos modos, reconocer los casos en los que no funciona, establecer los límites de validez de lo que se ha encontrado.

3. El trabajo de cálculo mental habilita un modo de construcción del conocimiento que, a nuestro entender, favorece una mejor relación del alumno con la matemática

Dado que la perspectiva desde la que proponemos el cálculo mental se define principalmente por el hecho de que, ante una situación y a partir del análisis de los datos, los alumnos busquen los procedimientos que les parecen más útiles, discutan sus elecciones y analicen su pertinencia y su validez, creemos que, a través de esto, inscribimos en el terreno del cálculo lo que constituye el desafío central de toda didáctica: que los alumnos puedan articular lo que saben con lo que tienen que aprender.

Para que los alumnos puedan confiar en sus procedimientos deben tener oportunidad de articularlos ante las situaciones de trabajo que se les proponen y, a la vez, para que avancen en la construcción de sus conocimientos, tienen que participar en sesiones de análisis y reflexión en las que se alcancen producciones nuevas.

El cálculo mental favorece, aunque no es el único medio, que los alumnos establezcan una relación más personal con el conocimiento, en oposición al frecuente sentimiento de ajenidad que la mayoría de las personas tiene con la matemática. Para muchos alumnos la matemática se reduce a un conjunto de técnicas complejas que permanecen arbitrarias en tanto que no han podido comprender sus condiciones de producción y uso.

Como plantea el equipo ERMEL:

> El cálculo mental es el dominio privilegiado en el que se debe dejar a los alumnos asumir su individualidad y utilizar a fondo el grupo para dar a cada uno la ocasión de adherir a las soluciones propuestas por los otros.

Lejos de ser un conocimiento cerrado, totalmente construido, la matemática puede aparecer como una aventura de conocimiento y compromiso, que vale la pena emprender, porque todos tienen un lugar y porque pueden reconocer la finalidad de lo que hacen.

4. *El trabajo de cálculo pensado debe ser acompañado por un acrecentamiento progresivo del cálculo automático*

Quizá parezca que hay aquí una contradicción de términos. Trataremos de aclararla.

Desde nuestra perspectiva, el cálculo mental es una vía de acceso para la comprensión y construcción de algoritmos.

Así, alumnos de 2º grado, antes de aprender el algoritmo de la suma, pueden resolver 28 + 23 de distintos modos, por ejemplo:

$$20 + 8 + 20 + 3 = \qquad\qquad 28 + 20 + 3 =$$

$$40 + 11 = 51 \qquad\qquad 48 + 3 = 51$$

(No es esperable que los niños produzcan estas escrituras aunque sí usan estos procedimientos. Volveremos sobre este punto más adelante.)

Estos modos de resolución, donde la reflexión sobre el significado de los cálculos intermediarios es preponderante, facilitan la asimilación posterior de los algoritmos.

A la vez, deberemos buscar que los conocimientos que se ponen en juego (en este ejemplo, suma de dígitos, suma de decenas enteras) estén disponibles en los alumnos, porque sólo en ese caso podrán realizar estimaciones y tener algún control sobre los algoritmos que están aprendiendo o que usan.

En este sentido, el cálculo mental, que es una vía de acceso al algoritmo, es a la vez su herramienta de control. Y para que esto sea posible, cierto nivel de cálculo tiene que alcanzar el carácter de automático.

Lo que en un momento es un desafío, una situación frente a la cual los niños trabajan, proponen respuestas, explicitan procedimientos (por ejemplo, en primer grado 8 + 4), más tarde deberá formar parte de lo que los niños tienen disponible, ya que, de no ser así, quedan comprometidos otros aprendizajes.

Por ejemplo, si un alumno tiene que resolver:

$$\begin{array}{r} 348 \\ +\ 274 \\ \hline \end{array}$$

hay una tarea de mayor complejidad que incluye tres veces la suma de dígitos. Si cada una de estas sumas es muy costosa para un alumno, es altamente probable que cometa errores y que pierda el control sobre la tarea mayor. Hemos presentado antes aportes de investigaciones que fundamentan estos aspectos.

Sin duda, un buen dominio del repertorio aditivo es condición necesaria pero no suficiente para la adquisición del algoritmo de la suma. Si lo subrayamos es porque, como esbozamos en la mirada histórica, hubo momentos en los que cualquier pretensión de memorización aparecía como contradictoria con una concepción constructivista.

Nuestro planteo es que la memorización de hechos numéricos, si bien no constituye jamás la vía de ingreso a una operación, aparece como producto necesario a cierta altura del aprendizaje y, dado que este proceso no se cumple del mismo modo ni al mismo ritmo en todos los alumnos, consideramos que deberá formar parte de la actividad de la clase el diagnóstico del nivel de procedimientos que los alumnos están usando, buscando que tengan conciencia de cuál es el nivel de cálculo disponible y planteando, a partir de esto, actividades que busquen el avance en estas adquisiciones.

En cuanto a la resolución de problemas, diversos estudios plantean que, debido a que la memoria de trabajo es limitada, el hecho de que los alumnos puedan apelar al cálculo automático libera espacio mental para que se centren en los aspectos más complejos (y probablemente más importantes) del problema a tratar.

Incorporando estos datos, reconocemos que si el objetivo central del trabajo de cálculo mental fuera el acrecentamiento del cálculo automático (liberar espacio mental) no se implica en ello el lento y detallado aprendizaje de cálculo mental que estamos proponiendo. (Bastaría con centrarse en el aprendizaje de las tablas y en la automatización de los algoritmos.)

Esperamos haber desarrollado suficientemente los otros argumentos por los que defendemos el trabajo de cálculo mental en su sentido amplio, del cual se desprenden, como beneficios secundarios, aspectos como "liberar espacio mental".

El cálculo mental, un camino particularizante

> El cálculo *pensado* es eminentemente particularizante: cada problema es nuevo y el aprendizaje va a consistir esencialmente en darse cuenta de que para una misma operación ciertos cálculos son más simples que otros, y que puede ser útil elegir un camino aparentemente más largo pero menos escarpado.
> Puede parecer paradójico para quien no practica las matemáticas, el considerar como matemática o matematizante una actividad que consiste, para cada alumno ante un problema particular de cálculo, teniendo en cuenta lo que sabe que sabe y de qué dispone, en buscar un procedimiento eficaz pero que quizá sea imposible de utilizar en otro cálculo. Este tanteo ingenioso, errático, heurístico, parece en las antípodas de la conducta matemática segura, "directa al objetivo", elegante, simple (ERMEL, 1981).

El maestro que quiere recuperar para sus clases esta concepción de lo que es hacer matemática, se verá enfrentado al desafío de lograr por este camino para cada alumno singular y personal, el avance de todos y de asegurar la adquisición de los conocimientos.
En este sentido el maestro necesita:

—tener una representación de cuáles son los conocimientos que a cada nivel deben estar disponibles para cada alumno para hacer posible el abordaje y adquisición de nuevos conocimientos;
—disponer de herramientas que le permitan diagnosticar los conocimientos de sus alumnos;
—conocer propuestas didácticas a través de las cuales lograr en sus clases la puesta en juego y el avance de los conocimientos de sus alumnos.

El cálculo mental, un proyecto articulador

Estamos convencidos de que un elemento central para el mejoramiento de la enseñanza en general y de la matemática en particular pasa por la constitución, en las escuelas, de equipos docentes que puedan vertebrar un proyecto común, que discutan objetivos y responsabilidades, acuerden criterios y enfoques, evalúen los logros y las dificultades, produzcan rectificaciones.
Somos conscientes de que para esto se requieren condiciones laborales e institucionales, pero también se requieren aportes específicos en cada área que permitan mayor precisión en las discusiones y en las definiciones a que se arribe.
En esta dirección vamos a presentar ahora un planteamiento curricular relativo al cálculo mental, terreno que nos parece particularmente propicio para un proyecto articulador.

El cálculo mental en los Documentos Curriculares

El cálculo mental no solía ser mencionado explícitamente en los planes y programas de hace algunos años. Actualmente forma parte de diversos documentos curriculares, aunque con un nuevo sentido respecto de prácticas preexistentes.
En el "Diseño Curricular Base. Educación Primaria" de España, que recientemente ha entrado en vigencia, se plantea:

> La construcción progresiva del conocimiento matemático transitará por una vía inductiva, tomando como dato primigenio la propia actividad del alumno y utilizando sus intuiciones, tanteos y aproximaciones heurísticas —estrategias personales elaboradas por los alumnos para afrontar las tareas y situaciones planteadas— como punto de partida para una reflexión que conduzca, de forma progresiva, a planteamientos más formales y deductivos. La adquisición de una actitud positiva hacia las matemáticas, del gusto por ellas y de la confianza en la propia capacidad para aprenderlas y utilizarlas, es otro aspecto básico que debe tenerse en cuenta para lograr la funcionalidad del resto de los aprendizajes.
> [...] el planteamiento expuesto aconseja:
> —conceder prioridad al trabajo práctico y oral, introduciendo

únicamente las actividades descontextualizadas y el trabajo escrito (utilización de notaciones simbólicas) cuando los alumnos muestran una comprensión de los conceptos matemáticos;

—conceder prioridad al trabajo mental (y, en especial, al cálculo mental) con el fin de profundizar los conocimientos matemáticos intuitivos antes de pasar a su formalización;

—utilizar ampliamente actividades grupales de aprendizaje que favorezcan los intercambios, la discusión y la reflexión sobre las experiencias matemáticas;

—prestar especial atención al desarrollo de estrategias personales de resolución de problemas, potenciando la inclusión de los conocimientos matemáticos que se vayan adquiriendo (representaciones gráficas y numéricas, registro de las alternativas exploradas, simplificación de problemas...);

—utilizar los distintos ámbitos de experiencia de los alumnos: escolares (otras áreas del currículo: conocimiento del medio, actividades físicas y deportivas, actividades artísticas, etc.) y extraescolares, como fuente de experiencias matemáticas.

Dentro de los Objetivos Generales seleccionamos los que son más pertinentes para este trabajo:

> Al finalizar la Educación Primaria, como resultado de los aprendizajes realizados en el área de Matemáticas los alumnos habrán desarrollado la capacidad de:
>
> 5. Utilizar instrumentos de cálculo (calculadora, ábaco) y medida (regla, compás, etc.), decidiendo, en cada caso, sobre la posible pertinencia y ventajas que implica su uso y sometiendo los resultados a una revisión sistemática.
>
> 6. Elaborar y utilizar estrategias personales de cálculo mental para la resolución de problemas sencillos a partir de su conocimiento de las propiedades de los sistemas de numeración y de las cuatro operaciones básicas.
>
> 7. Valorar la importancia y utilidad de las mediciones y cálculos aproximados en determinadas situaciones de la vida cotidiana, utilizando su conocimiento de los sistemas de numeración y de los sistemas de medida para desarrollar estrategias personales a tal fin.

En objetivos de esta naturaleza están involucrados conocimientos (conceptos, procedimientos, técnicas) así como actitudes y valores. Para alcanzarlos será necesario diseñar actividades específicas orientadas a tal fin. Más adelante daremos algunos ejemplos.

El *Programa de Matemática* de la provincia de Corrientes y el *Diseño Curricular* de la provincia de Río Negro incluyen una distribución de contenidos de cálculo mental elaborada por la licenciada Irma Saiz.

Tal distribución de contenidos permite precisar, para cada ciclo y grado, el nivel de cálculo que los alumnos tienen que dominar.

Es conveniente que los docentes analicen la relación entre estos contenidos y los que aparecen determinados en los propios documentos curriculares, buscando explorar, o eventualmente determinar, los condicionamientos internos entre contenidos. En algunos casos, se plantea el dominio de ciertos cálculos porque son los más frecuentes en la vida cotidiana, pero también porque son organizadores para el control de otros cálculos. Por ejemplo, a nivel de 4º y 5º grado se propone:

—Comparación de fracciones con los enteros (mayor, menor o igual a 1 o a 2, etcétera).

—Suma de fracciones más usuales ($1/2 + 1/4 =$; $1/2 + 3/4 =$; $2/3 + 1/6 =$).

Utilizando estos conocimientos los alumnos podrán, mediante la aproximación y la comparación, estimar y controlar el resultado de operaciones con fracciones para las que utilizan algoritmos.

Por ejemplo, estimar que el resultado de $5/6 + 9/11$ es próximo a 2 porque cada una de las fracciones es próxima a 1; podrán controlar que $4 + 2/5$ no puede ser $6/5$ porque $6/5$ es apenas algo más que 1 y ya tenían 4 enteros; así como prever que $3/6 + 12/15$ tiene que tener un resultado entre 1 y 2, eventualmente comparando con el resultado de $1/2 + 3/4$, que forma parte de los cálculos que se busca que puedan resolver mentalmente.

Cuando decimos que el trabajo sobre cálculo mental tiene carácter articulador lo planteamos en dos sentidos: por una lado, hace posible el intercambio entre los docentes de distintos grados sobre el nivel de procedimientos que los alumnos están usando, y que cada maestro se propuso que dominen (y no sólo en términos

1º Ciclo: Contenidos de Matemática. Cálculo Mental (Provincia. de Corrientes) Distribución de contenidos realizada por la licenciada Irma Sáiz para el programa de matemática		
1º grado Sumas de la forma: a + b = 10 Restas de la forma: 10 - a = b Restas de la forma: a - b = 1 Sumas de la forma: a + a = con a ≤ 10 Complementos a 10: a + ...= 10 Sumas de la forma: 10+a=...; 20 + a=... Sumas de la forma: a + b = 100 con a y b múltiplos de 10 (Ej: 20 + 80 = 100) Complementos de 100: a +... = 100 con a múltiplo de 10 (Ej: 70 + ... = 100) Escrituras equivalentes: 34 = 30 + 4 9 = 5 + 6 - 2 34 = 10 + 24 9 = 4 + 5 34 = 10 + 10+ 10 + 4 9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1 34 = 40 - 6 9 = 10 - 1 etc. Propiedades conmutativa y asociativa	2º grado Restas de la forma: a - b = 10 Sumas de la forma: 100 + a= Restas de la forma: 100 - a = con a múltiplos de 10 (Ej: 100 - 30 =...) Complementos a 100: a +...= 100 (Ej: 28 +...= 100) Sumas de la forma: a + b = 100 (Ej: 75+25=100; 32+68=100) Dobles y mitades Escrituras equivalentes: 147 = 50 + 50 + 47 147 = 100 + 47 147 = 40 + 60 + 30 + 17 147 = 200 - 50 - 3 Distancia entre dos números (Ej.: distancia entre 50 y 76) Escalas ascendentes y descendentes del 2, 5 y 10.	3º grado Escalas ascendentes y descendentes del 10, 20, ...100, 200... Encuadramiento de números entre decenas, centenas, etcétera. (Ej.: 20 < 28 < 30 140 < 145 <150 100 < 145 < 200) Restas de la forma: a - b = 1; a - b = 10; a - b = 100; etcétera. Escrituras equivalentes: (Ej.: 1359 = 500 + 500 + 300 + 59 = 1000 + 300 + 50 + 9 = 2000 - 200 - 40 - 1) Sumas y restas con medidas de tipo: años, día, mes, semana, hora, 1/4 h, etc. Multiplicaciones de la forma axb con a<10 Divisiones y multiplicaciones especiales: x2: ÷ 2; x4 (multiplicar dos veces por 2); x8 (multiplicar tres veces x2); ÷ 4 (dividir dos veces por 2); x5: ÷ 5: etcétera. Dobles y mitades. Triples y tercios. Propiedades conmutativa y asociativa.

2º Ciclo contenidos de Matemática. Cálculo mental	
4º grado Encuadramiento de un número respecto a las decenas, centenas, unidades de mil, etcétera. Contar de 100 en 100 a partir de cualquier número (Ej.: 741, 841...). Números equidistantes entre otros dos (en medio de...). Distancia entre dos números cualesquiera. Mitades y dobles de números de 3 o 4 cifras. Escrituras equivalentes (utilizando las 4 operaciones). Distintas formas de encontrar un producto 8 x 14 = 2 x 4 x 14 = 8 x 2 x 7 = (8 x 10) + (8 x 4) Cálculo del número de cifras de un cociente. Estimación de resultados de división de números naturales Comparación de fracciones con los enteros (mayor, menor o igual a 1 o a 2, etc.). Múltiplos de los primeros números: 2, 3, 4, 5... Divisores de algunos números: 10, 12, 16, 15, 20, ... Cálculos con monedas y billetes en uso. Aproximación y redondeo de resultados de las cuatro operaciones.	5º grado Sumas de la forma: 2000 + 5300 =; 25.000 + 2850 =... Restas de la forma: 807.000 - 3000= 807.400-10= Fracciones más comunes de números enteros: 1/4 de; 1/2 de; 1+1/2 de; 3/4 de, etc. Dobles y mitades de fracciones (doble de 1/3, mitad de 6/4, mitad de 3/4, etc.) Sumas de fracciones más usuales (1/2+1/4=; 1/2+3/4=; 2/3+1/6=etc.). Sumas de decimales de la forma: a+b=1, a+b=10, etc. Restas de decimales de la forma: 1 - 0,25=; 10 - 1,50 =, etc. Encuadramiento de decimales entre dos enteros: 31 < 31, 24 < 32 Estimación y aproximación de resultados de mediciones longitud, capacidad, peso y tiempo. Estimación de la medida de los ángulos más usuales: 45° (mitad de 90°), 30° (tercera parte de 90°); 135° (90+45); 60° (doble de 30°), etcétera.

3º ciclo: contenidos de Matemática. Cálculo mental
6º y 7º grados
Representación de números de 3 o más cifras en la recta numérica con escalas de 100 en 100, de 1000 en 1000, etc. Cálculo de porcentajes más usuales: 10 %, 25 %, 75 %, 100 %. Relaciones más usuales entre fracciones y porcentajes (ej.: 1/4 y 25 %, 3/4 y 75 %, 1/2 y 50 %, 1 + 1/2 y 150 % etc.). Escalas ascendentes y descendentes de 0,1 - 0,5 - 10,10 - 2,5. Complementos de decimales del entero más próximo (ej.: 25,6 + ... = 26). Dobles y mitades de números decimales. Cálculo aproximado de sumas de números decimales. Estimación de raíces no exactas de números naturales. Estimación de longitudes y superficies de objetos, lugares y espacios de la vida diaria. Unidades de tiempo, escalas ascendentes y descendentes de 15 en 15 minutos a partir de una hora dada. Cálculos sobre horarios y duraciones de tiempo.

de "enseñé la suma"). Por otro lado, se plantea una articulación horizontal entre los contenidos por enseñar, tanto en el sentido de establecer qué aprendizajes facilitan el acceso a otros como en la búsqueda explícita de relaciones entre contenidos. Por ejemplo, en el nivel de el tercer ciclo (6º – 7º grado):

— Cálculo de porcentajes más usuales: 10 %, 25 %, 75 %, 100 %
— Relaciones más usuales entre fracciones y porcentajes: por ejemplo: 1/4 y 25 %, 3/4 y 75 %, 1/2 y 50 %, 1 + 1/2 y 150 %

Nos parece interesante que este material sea analizado en ambos sentidos. El maestro que quiere incluir esta perspectiva tiene que diagnosticar el nivel de dominio de sus alumnos de los contenidos de cálculo mental propuestos para los grados anteriores e iniciar el trabajo desde allí, ya que tienen un fuerte encadenamiento interno.

Siendo un planteo tan abarcador no nos resulta posible más que sugerir algunas orientaciones y mostrar ejemplos de actividades relativas a los distintos ciclos de la escuela primaria.

Los docentes interesados pueden encontrar propuestas en los libros del maestro y del alumno de E. Bergadá, y otras.

Primer ciclo: del conteo al cálculo

Hemos tenido oportunidad, en el marco de la Dirección de Currículum de la Secretaría de Educación de la Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires, de llevar adelante un proyecto de Desarrollo Curricular de Matemática - Primer ciclo. El producto de ese trabajo, del que participaron 20 docentes municipales y en el que nos acompañaron Adriana Castro y Haydeé Mosciaro, fue publicado en Parra, C. y Saiz, I., *Los niños, los maestros y los números.*

Vamos a reproducir en este artículo una parte del documento porque nos parece pertinente, pero también porque no es una publicación disponible para el público (edición restringida, para los docentes municipales).

Evolución de representaciones, evolución de soluciones

Estamos convencidos de la importancia de proveer a los alumnos de oportunidades de enfrentar los problemas con sus recursos, de buscar un camino personal hacia la solución, pero a la vez... —y he aquí el doble desafío— es necesario que los alumnos avancen en sus procedimientos y que todos lleguen a dominar los procedimientos "expertos", aquellos que el maestro (y la comunidad) reconocen como los que permiten dominar la situación, cualquiera que sea el campo numérico o la dimensión con que esté planteada.

Trabajar sobre un ejemplo nos va a permitir tener una idea más clara respecto de la evolución de la que estamos hablando:

"Subieron 8 personas al colectivo. Ahora hay 45 personas en el colectivo. ¿Cuántas personas había antes de esta parada?".

Se pueden describir varios tipos de soluciones correctas al problema presentado:

—*Solución 1*: el alumno dibuja 45 marcas, tacha o borra 8 y cuenta las restantes.

—*Solución 2*: el alumno no reconoce ninguna operación vinculada al problema, pero se construye una representación del problema en función de la cual puede elegir un procedimiento, por ejemplo, descontar 8 de 45, de uno en uno, eventualmente ayudándose con los dedos; de algún modo es como si mentalmente hiciera bajar uno a uno a los pasajeros que subieron para reencontrar la situación inicial.

—*Solución 3* (muy próxima de la más eficaz): el alumno se representa el problema como una adición en la que se desconoce uno de los términos y busca resolver lo que en una ecuación se expresaría así:

$$\ldots + 8 = 45$$

—*Solución 4* (la "experta" o canónica): el alumno reconoce este problema como de resta (45 – 8) y la realiza mentalmente o por escrito.

Estos cuatro alumnos han hecho matemática, en el sentido de que han articulado sus conocimientos disponibles y las significaciones que les dan con la representación que se hacen del problema. En efecto, tanto el conteo (solución 1) como la sustracción (solución 4) son herramientas matemáticas, pero el problema, que para el alumno 4 es de resta, no lo es para el alumno 1.

Queda mostrado que la solución correcta de un problema de sustracción (desde el punto de vista del maestro) no supone a priori el dominio de la sustracción.

Es posible distinguir en las soluciones dadas como ejemplo dos grandes polos:

—el polo de las *soluciones que apelan a una representación figurativa de la situación*, por las cuales los alumnos simulan lo real mentalmente (como en la solución 2) o dibujándolo, o podría ser con objetos (como en la solución 1);

—el polo de las *soluciones que apelan a una representación matemática de la situación*, en las cuales los alumnos plantean de algún modo el problema en una ecuación para poder trabajar únicamente en el nivel de los números (como en las soluciones 3 y 4).

El pasaje del primero al segundo polo se acompaña frecuentemente de un cambio de las técnicas utilizadas: en el primer caso, los alumnos utilizan las que provienen del conteo; en el segundo caso fundamentalmente son utilizadas técnicas de cálculo. Esta distinción no da cuenta, sin embargo, de todos los niveles de representación de la situación que pueden existir en los alumnos. Así, la solución 3 muestra que el alumno produce una escritura que traduce una cierta simulación de la realidad evocada, particularmente en su desarrollo temporal "...+ 8 = 45", "..." (los pasajeros que estaban en el colectivo "+ 8" (los que subieron), "= 45" (los que hay ahora en el colectivo).

Hay que saber aceptar que, en cada categoría de problemas, el pasaje de la utilización de procedimientos ligados al conteo y vinculados a una representación figurativa de la situación, al reconocimiento de un modelo de resolución que implica el recurso a técnicas de cálculo expertas es con frecuencia lento, raramente definitivo para un alumno y nunca simultáneo para todos los alumnos.

Esta observación implica muchas consecuencias:

—Hay que aceptar, e incluso favorecer, en la clase la pluralidad de procedimientos de resolución porque no sólo anima a los alumnos a elaborar su propia solución sino que puede ser fuente de progreso, de aprendizaje a partir de las confrontaciones que se pueden organizar entre ellos.

—Hay que aceptar también que, para situaciones aparentemente análogas, algunos alumnos dan la impresión de retroceder. El aprendizaje está lleno de dudas, de retrocesos, de aparentes detenciones hasta que las adquisiciones se estabilizan.

—Una exigencia precoz de formalización de soluciones (reconocimiento del cálculo a efectuar y producción de la escritura matemática correspondiente) puede ser una fuente de obstáculos para muchos alumnos que van a tratar de producir la escritura matemática directamente a partir del enunciado apoyándose en palabras claves y producirían 45 + 8 en el problema descrito, sin involucrarse en la fase esencial de tratar de comprender la situación propuesta.

—El medio del que dispone el docente para favorecer el pasaje de un polo a otro es fundamentalmente ir variando las situaciones que les propone a los alumnos (para los problemas aditivos y sustractivos el "tamaño" de los números es una variable decisiva) lo cual va a ir exigiendo nuevos procedimientos y mostrando los límites o la inutilidad de los anteriores. Otra herramienta fundamental de que dispone el docente es organizar los intercambios y las discusiones entre los alumnos, así como asegurar la difusión de los "hallazgos" de los alumnos entre todos. Llegan momentos en el trabajo en el que ciertos procedimientos y, particularmente, ciertas formas de escritura matemática se "oficializan".

Del conteo al cálculo

Acabamos de mostrar, en el marco de la resolución de un problema, un abanico de procedimientos que van desde los que se apoyan en el conteo hasta los que trabajan en el nivel del cálculo.

Plantearemos cómo se puede favorecer el pasaje del conteo al cálculo. Aunque nos vamos a centrar en metas por conseguir en el nivel de procedimientos, queremos subrayar que el sentido de las propuestas sigue siendo ayudar a los alumnos a resolver mejor los problemas que se les planteen.

El conteo

En el marco de las investigaciones provenientes de la psicología y la didáctica se ha revalorizado el papel del conteo en los aprendizajes numéricos.

Los niños necesitan enfrentar múltiples situaciones en las que

puedan reconocer la utilidad de contar y la necesidad de ser precisos (no contar ninguno dos veces, no saltear ninguno).

Al inicio de primer grado, para resolver un problema en el que aumenta o disminuye una cantidad el procedimiento más utilizado por los niños es el de materializar las cantidades (objetos, dibujos, dedos, etc.) y resolver por conteo.

Nos vamos a plantear entonces el mejoramiento del conteo en dos direcciones:

a) en cuanto al conteo utilizado para resolver situaciones;
b) en cuanto al dominio y extensión de la serie numérica oral.

a) Al comienzo, para resolver 6 + 3 los niños recuentan desde 1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Apuntamos entonces a lograr que utilicen el *sobreconteo*
6... 7, 8, 9

Es decir, que partan de uno de los números y agreguen la otra cantidad contando.

Muchos alumnos empiezan a usar, implícitamente, propiedades de la suma. Por ejemplo, la conmutatividad. Así, para resolver 3 + 9, hacen 9... 10, 11, 12.

No estamos proponiendo que el maestro "enseñe" esta propiedad, sino que favorezca el intercambio entre los alumnos de modo que los "modos de arreglárselas" de cada uno se conviertan en terreno común.

Para una situación de disminución, 12 – 4, muchos niños hacen 12 marcas, tachan 4 y cuentan las que les quedan.

Es necesario realizar actividades para que puedan *descontar* (contar para abajo, "para atrás").

Además del interés inmediato, estos procedimientos encontrarán posteriormente una prolongación, particularmente en cálculo mental. Por ejemplo, para calcular 23 + 17, un alumno de 2º podrá partir de 27 y agregará sucesivamente 3 y después 10.

b) Estos procedimientos, para poder ser puestos en juego, requieren por parte del alumno una buena disponibilidad de la serie numérica oral, particularmente la capacidad de:

— decir directamente el siguiente y el anterior de un número sin recitar la serie desde el inicio;

— continuar la serie oralmente a partir de un número dado, en un sentido y en otro;
— enunciar, por ejemplo, cuatro números a partir de uno dado, en un sentido o en otro;
— decir, por ejemplo, los números entre 7 y 11, pudiendo especificar al terminar cuántos números se han dicho;
— poder contar de a 2, de a 5, de a 10, resulta particularmente importante en tanto apoyos fundamentales para el cálculo.

Para asegurar este dominio en todos los alumnos será necesario que se realicen múltiples actividades, juegos, a raíz de situaciones cotidianas y planificadas ex profeso. Se trata de que el contar ocupe un lugar. Los dos aspectos en los que planteamos el mejoramiento del conteo se deben desarrollar simultáneamente.

Los niños tienen que tener oportunidad de comprobar lo que saben y reconocer, a la vez, las metas a lograr. Nuestra experiencia nos muestra que son muy capaces de comprometerse si pueden saber con qué y para qué.

Los procedimientos mentales de resolución

Consideramos que un objetivo fundamental de primero-segundo grado es el desarrollo de procedimientos mentales de resolución en el marco de los problemas referidos anteriormente.

Se trata, a la vez, de favorecer la representación mental de las situaciones y la construcción, por parte de los alumnos, de soluciones desprendidas de la acción misma, es decir, que permiten anticipar los resultados de una acción todavía no realizada.

Más tarde se favorecen los procedimientos escritos que se apoyan en las reglas de escritura de los números (numeración de posición). Pero para que los alumnos puedan trabajar en este nivel tienen que ser capaces de construirse una representación mental correcta de la situación y disponer de la posibilidad de obtener mentalmente ciertos resultados.

Estos procedimientos mentales funcionan en principio para los alumnos de manera muy local, para ciertos números. Se buscará extender progresivamente su dominio de funcionamiento y su disponibilidad para poder darle un carácter más general. Por ejemplo, un alumno puede ser capaz de resolver mentalmente un problema que involucra los números 2 y 3, y no poder hacerlo con los números 4 y 6.

Los maestros con experiencia en 1º y 2º grado constatan que entre sus alumnos hay quienes disponen de procedimientos mentales de resolución y quienes no, hay quienes memorizan con facilidad y quienes tienen que reconstruir siempre todo, hay otros a quienes se les ocurren diversas maneras de resolver y quienes disponen de muy pocos recursos.

En tanto consideramos fundamental lograr que todos los alumnos dispongan de procedimientos mentales de resolución y construyan comprensivamente los algoritmos, lo que vamos a plantear es que estos logros tienen que ser asumidos como metas desde la enseñanza.

Hay un primer requerimiento y es que, a término (hacia fin de segundo grado), los alumnos tienen que saber producir rápida y casi instantáneamente una buena respuesta a lo que se suele llamar el repertorio aditivo: encontrar uno de los términos a, b o c en $a + b = c$, cuando $a < 10$ y $b < 10$, lo cual no excluye el conocimiento de otros resultados pero condiciona su producción. Esta es la base del cálculo, sea escrito o mental.

Señalemos sintéticamente las metas que se pueden plantear en este proceso.

a) La memorización de cálculos simples

Constance Kamii (1986) hace observaciones válidas sobre este punto:

> Después de definir como objetivo la construcción de sumas, por parte del niño, el maestro necesita establecer una secuencia entre las actividades que pone a disposición de los niños para su elección. Evidentemente, el nivel de dificultades no puede ser el mismo en marzo, julio y noviembre.
>
> Como se dijo anteriormente, la mayor parte de los programas de aritmética de primer curso que existen en la actualidad, empiezan

la adición definiendo como objetivo las sumas que dan 5 o 6, para continuar hasta 9 o 10, 12 y 18. Así pues, la secuencia de objetivos continúa estableciéndose de acuerdo con la *magnitud* de la suma, a pesar de que las investigaciones han demostrado que la dificultad depende del tamaño de los *sumandos*. Por ejemplo, 5 + 1 = 6 es más fácil de recordar que 3 + 2 = 5.

La secuencia de objetivos que viene a continuación se basa en la magnitud de los sumandos, que corresponde a la manera de aprender de los niños. Esta información debería ayudar a los maestros a decidir qué juegos deben poner a disposición de los alumnos en la clase (págs. 80 y 81).

Esta autora sugiere:

— adición de sumandos hasta 4,
— adición de sumandos hasta 6 (por la utilización de dados),
— adición de dobles (2 + 2, 3 + 3, etc.) hasta 10.

Diversas investigaciones afirman que los dobles y las combinaciones en las que se añade 1 a un número son más fácilmente memorizadas que otras combinaciones. Kamii señala que, entre los dobles, 2 + 2 es la primera en ser memorizada, seguida de 5 + 5. Esta última, pese a ser una suma mayor, es más fácil de recordar que 3 + 3 o 4 + 4. Igualmente 10 + 10 es más fácil que 9 + 9. Además 2, 5 y 10 son apoyos fundamentales en la organización del repertorio y en el tratamiento de las cantidades. Los dobles, además de ser fáciles de memorizar, se convierten en la base para resolver otros cálculos. Así 5 + 6 puede ser pensado como 5 + 5 + 1.

b) Resolución de cálculos no tan simples utilizando los simples

Como sugeríamos en el párrafo anterior, se busca favorecer que los alumnos utilicen sus conocimientos para tratar las situaciones respecto de las cuales no disponen de resultados memorizados.

Por ejemplo, disponer de los pares de sumandos que dan 10 les permite a los alumnos tratar diversos cálculos. Así, para hacer 8+6 muchos niños piensan en (8 + 2) + 4. O en cálculos de resta, por ejemplo, 14 – 6, lo convierten en (14 – 4) – 2.

Es importante favorecer la búsqueda y explicitación de distintas maneras de tratar un cálculo. Por ejemplo, para 7 + 8:

(7 + 7) + 1	Reagrupamiento en torno a un doble
(7 + 3) + 5	Reagrupamiento en torno a 10
(8 + 2) + 5	Reagrupamiento en torno a 10
(5 + 5) + 2 + 3	Reagrupamiento en torno a 5

No se trata sin embargo de "enseñar" estas diferentes alternativas ni de que cada alumno deba "conocer" cada una. Se trata más bien de que cada uno encuentre sus maneras preferidas, utilizando a fondo el grupo para dar la ocasión de adherir a las soluciones propuestas por otros. El recurso a la imitación es inteligente en la medida en que supone el reconocimiento del valor de lo propuesto por otro. Sabemos que hay niños a los que parece que nunca se les ocurre nada, pero nuestra experiencia nos muestra que si este trabajo se asume desde la perspectiva de la enseñanza y como meta para toda la clase, esos niños dejan de estar en soledad enfrentados a tamaña empresa y se involucran en la tarea, consiguiendo logros definidos.

La utilización de cálculos simples para resolver otros más complejos se vincula de modo inmediato al trabajo que se haga en relación con la extensión de la serie numérica, la comprensión de las regularidades de su funcionamiento, la interpretación de su codificación escrita, etcétera.

¿Cómo puede organizar el docente la enseñanza para alcanzar las finalidades planteadas?

La construcción paralela y vinculada del cálculo pensado y del cálculo automático requiere que se lleven adelante, sistemáticamente, dos tipos de actividades:

— un trabajo de memorización de repertorios y reglas, a medida que se han ido construyendo, y
— un trabajo colectivo, lento y detallado, de aprendizaje del

cálculo mental pensado, que se apoya en la comparación de diversos procedimientos utilizados por distintos chicos para tratar el mismo problema.

La reconstrucción y la toma de conciencia

Al principio, la memorización no entra en escena. Ante las situaciones y actividades que se les proponen, los alumnos producen resultados por sus propios medios. El maestro selecciona y propone cálculos que favorecen procedimientos reconstructivos. Los alumnos buscan recursos para resolverlos, interactuando en pequeños grupos y utilizando, cuando es necesario, papel y lápiz. Posteriormente se analizan los distintos recursos y se discute la aplicabilidad y eficiencia de cada uno en el cálculo planteado.

Esto les permite a los alumnos reconocer gradualmente la utilidad de usar resultados conocidos para resolver otros cálculos. Se va construyendo un repertorio colectivo, visible en la clase y utilizable como recurso.

Como dicen los miembros del equipo ERMEL en su documento: "El cálculo mental es un asunto de trabajo (saber y entrenamiento), de memoria y, sobre todo, de confianza en uno mismo".

Aunque no se logre por completo en primero y segundo grado, debemos apuntar a ello desde el inicio. Es la relación con el saber la que está en juego y debemos cuidarla desde los primeros contactos.

Un ejemplo de actividades de reflexión sobre los cálculos: fáciles y difíciles

Uno de los primeros requisitos es que los alumnos empiecen a tomar conciencia de los procedimientos que utilizan; necesitan saber qué es lo que saben (en el sentido de tener disponible) y cómo pueden apoyarse en lo que saben para obtener otros resultados.

Para lograrlo tendremos que proponer actividades de otro carácter. Veamos un ejemplo.

En los primeros grados en los que trabajamos, los alumnos habían producido un conjunto de cálculos (en el marco del juego de la caja). Estos cálculos se habían registrado en un afiche. Luego se volvió sobre los cálculos, pero para analizarlos y clasificarlos.

Los cálculos, que eran una herramienta para resolver situaciones y expresar lo que se ha hecho, se vuelven objeto de reflexión. La consigna que dispara esta actividad es clasificar los cálculos en fáciles y difíciles.

Los cálculos no tienen necesariamente que ser producto de una actividad anterior. El docente puede seleccionarlos en función de datos como los que hemos presentado (los que se adquieren más tempranamente que otros) o en función de reflexiones que le interesa provocar, por ejemplo 1 + 8, porque muchos alumnos recurren a la conmutatividad (aunque no podrían nombrarla ni hace falta), y por el rol del + 1 vinculado al sucesor. Por supuesto que incluirá algunos que anticipa que serán considerados difíciles para desencadenar un trabajo como el que mostraremos.

Un conjunto de cálculos trabajables es el siguiente (aunque el número es excesivo para ser analizado en una clase):

17 - 7 5 - 1 4 + 7 3 + 2
5 + 5 8 - 2 7 + 1 23 - 1
10 + 9 16 + 1 12 - 2 8 + 9
1 + 8 10 - 9 6 - 3

Un trabajo similar puede ser planteado sobre el repertorio sustractivo o sobre el repertorio multiplicativo en los grados siguientes.

La clase está organizada en grupos de 4 o 5 alumnos (que tienen que tener experiencia de trabajo en pequeños grupos). Cada grupo recibe un conjunto de tarjetas en las que están anotados los cálculos sobre los que van a pensar.

Consigna: "Hoy vamos a trabajar sobre los cálculos, pero lo que van a hacer es pensar si les resultan fáciles o difíciles y por qué. Van a mirar cada una de las tarjetas y van a decidir si lo consideran fácil o difícil, pero ¡atención!, tienen que ponerse de acuerdo en el equipo y consultarse entre todos. Si no están de acuerdo, lo pondrán en 'más o menos' o 'dudoso' y después conversaremos. En la actividad que hacemos hoy no hay ganadores ni perdedores".

Todas las maestras del proyecto, al analizar la propuesta, dudaron de que fuera posible para los alumnos un trabajo de este tipo, y de hecho, cuando lo iniciaron, en la mayoría de los casos les fue difícil conducir la actividad y a los alumnos entrar en ella.

Era esperable que esto sucediera. Maestras y alumnos estaban entrando en una modalidad de tarea para la cual no tenían experiencia. Juntos tenían que otorgar significado a la consigna. Las maestras están acostumbradas a estimar si algo va a ser fácil o difícil para sus alumnos (lo hacen todo el tiempo, cuando deciden qué proponerles), pero en este caso tenía que acompañarlos en la tarea de "juzgar" por sí mismos la facilidad o dificultad, y en la tarea, aún más complicada todavía, de explicitar los criterios por los cuales los reúnen.

De hecho, en muchos casos, al principio hubo indiscriminación y las respuestas solían ser "porque sí", "porque son fáciles...".

¿Desde quién se determina la facilidad-dificultad? Este aspecto queda muy vivamente expresado en el comentario de una alumna de la Escuela Nº 22.

Como algunos alumnos le preguntaban a la maestra si tal cálculo era fácil o difícil y ella insistía en que lo que importaba era que ellos lo decidieran, dicha alumna dice: "Claro, para vos son todas fáciles porque sos grande, en cambio para nosotros algunas no sabemos porque son difíciles".

¿Qué criterios usaron los alumnos para clasificar los cálculos?

Fáciles	Difíciles
Escuela Nº 15	
— porque los sabemos rápido	— porque son más lerdos, tenemos que hacer palitos y contar
— porque en seguida los sabemos	— porque no nos alcanzan los dedos
— 7 + 1, ¡qué fácil!	— estos otros no los sabemos
— porque contamos con los dedos	— tenemos que pensar, son grandes

Fáciles	Difíciles
Escuela Nº 24	
— 10 + 9 me lo dice el número	— 45 + 29 son números altos
— 10 + 6	— 35 + 40
— 5 – 2 las sabemos de memoria	— 8 + 5 las podemos hacer con la mente pero no rápido
— 6 – 3	— 4 + 7
Escuela Nº 4	
	—las que no teníamos en la cabeza
	—si tres no la sabían es difícil
	—más grande que 14 o 15
Escuela Nº 16	
—y si para todos o la gran mayoría resultan fáciles	
—cuando los números son chicos	—números grandes
—si agregás uno es fácil	—si agregás más es difícil
Escuela Nº 7	
—porque los hicimos rápido con la cabeza	—porque son muchos números
—porque no usamos los dedos	—porque nadie los sabía
—porque no hay que usar la cuenta	

Básicamente los niños toman en cuenta:

- el "tamaño" de los números: chicos y grandes,
- los recursos: contar, usar los dedos, no usar los dedos, usar la cabeza, hacer palitos, usar la cuenta,
- el consenso: cuántos los sabían,
- la velocidad de la respuesta.

El mismo criterio es usado en algunos casos como criterio de facilidad y en otros de dificultad.

Sin embargo, dado que no apuntamos a una clasificación sino más bien que se pongan a discusión los criterios y se busquen vinculaciones entre cálculos y procedimientos, el sentido de la actividad descansa en lo que desencadena, en lo que provoca. (No hay una clase en la que se "logra".)

Retomaremos después algunos ejemplos de prolongación de la actividad y presentaremos una propuesta tendiente a asegurar en todos los niños que la clase de los fáciles "porque los sabemos" sea lo más amplia posible.

Lo que es fácil para unos es difícil para otros

Como es de prever, tanto en la discusión dentro de los grupos como en las puestas en común se producía con frecuencia que un mismo cálculo fuera clasificado como fácil o difícil.

Cuando alguien quería que un cálculo pasase de la lista de difíciles a la de fáciles comúnmente explicaba cómo se las arreglaba para resolverlo, y si bien esto no implicaba que los demás se apropiaran inmediatamente de estas ideas, se producía la circulación de "buenas ideas". Es el maestro el que se ocupará de proponer situaciones, cálculos y juegos que serán oportunidades de usar y poner a prueba los procedimientos formulados.

Escuela Nº 24

Un grupo había propuesto 49 – 9 como difícil. Otros dijeron que era fácil: "Cuarenti..., nueve..., sacás nueve..., es cuarenta...".

Es una buena ocasión para pedir a los niños que piensen y propongan otros cálculos en los que pase lo mismo. Podrán proponer 39 – 9, 38 – 8, 27 – 7, 26 – 6, y tantos otros... con los que estarán poniendo en juego un aspecto importante del sistema de numeración.

En esa misma clase apareció como difícil 40 + 20, y una nena explicó que era fácil: ella hacía 4 + 2 = 6 y le agregaba 0 a 6. Esta es una idea poderosa, pero para la mayoría todavía estaba lejana.

Los "descubrimientos" no se generalizan de inmediato, los convenientes se construyen poco a poco

Escuela Nº 4

La consigna de trabajo era: "Escribimos cálculos fáciles que no están en el cartel".

Frecuentemente los niños buscan hacer funcionar ciertas regularidades. Un grupo descubrió que adicionando 0 a cualquier número obtenía cálculos fáciles. Se pusieron muy contentos con su descubrimiento y lo comentaban en voz baja (para que no se copiaran los otros chicos).

Escribieron desde 0 + 1 hasta 0 + 14.

El mismo grupo, más tarde, parte de 5 + 1 = 6; 5 + 2 = 7, y llega a 5 + 5 = 10 diciéndolo como quien repite una tabla con la intervención de todos.

Al llegar a 5 + 5 pararon, quizá porque ese cálculo figuraba en el cartel.

En la clase siguiente, los mismos grupos tenían que pensar y escribir cálculos difíciles que no estuvieran en el cartel.

Han incorporado la práctica de consultarse entre todos antes de escribir un cálculo.

El equipo que había "descubierto" el + 0 para hacer fáciles, está discutiendo si 30 + 0 es fácil o difícil.

Alumno: "¿No vés que es 30?".
Alumno: "Para mí es difícil".

Otro integrante dice que para él también, y el primero, de muy mala gana, anota 30 + 0 como difícil. Cuando se hizo la puesta en común muchos dijeron que era fácil.

Alumno: "Porque el 0 es nada y si le ponés 1, tenés 1, si ponés 30, tenés 30".

Todos se mostraron convencidos, incluso los dos chicos que lo habían propuesto como difícil.

La clase de los fáciles que se va constituyendo muestra que los alumnos reconocen los puntos de apoyo

En la fundamentación del proyecto, en el apartado "Del conteo al cálculo", hemos esbozado el recorrido que pueden hacer los alumnos para lograr el dominio del repertorio aditivo. Los puntos de apoyo son reconocidos por ellos mismos, pero el maestro tiene un rol tanto en favorecer esta explicitación como en dar oportunidad de ponerlos en juego.

Escuela Nº 16

Los alumnos han clasificado los cálculos provenientes del juego de la caja en fáciles y difíciles. En otra clase analizan los fáciles, explican por qué los son y dan otros ejemplos.

11 + 1 "Si ponés 1 es el siguiente".
12 – 1 "Si sacás 1 es el anterior".

Queda planteado para todos que agregar 1 y quitar 1 es fácil. Como esto se apoya en el conocimiento de la serie numérica, es importante realizar actividades para garantizar la evolución del conteo oral durante todo el año (y variaciones: de a 2, de a 5, de a 10).

10 + 10 "Vos tenés 10 dedos y entonces ya no los contás, seguís con los otros".
"10 podemos ponerlos en la cabeza".

Ambos procedimientos implican sobreconteo.
Cuando tuvieron que proponer otros cálculos fáciles como éste aparecieron:

10 + 7	20 + 20
10 + 9	40 + 20
10 + 2	

Recordemos que niños de otra escuela decían que 10 + 9, 10 + 7 "te lo dice el número" es decir que se apoyaban en su conocimiento de la serie numérica.
El dominio de ambos cálculos, decena + dígito y suma de decenas enteras, se considera el objetivo por lograr. Entre 1º y 2º grado todos los alumnos tienen que ser capaces de dar una respuesta inmediata. Figuran en la distribución de contenidos de cálculo mental que presentamos y formaron parte del trabajo que se propuso al inicio de 2º grado.

Los mismos alumnos de la Escuela Nº 16 analizaron en otra clase los cálculos que eran difíciles para todos, y fueron proponiendo modos de resolución en los que usaban lo que sabían.
Algunos ejemplos:

8 + 11. *Noelia*: "Yo al 8 le puse... ¡No! Al 11 le saqué 1 y al 8 le puse el 1 del 11 y entonces me quedó 9 + 10 que es 19".

La maestra escribió en el pizarrón:

8 + 11 = 9 + 10

20 – 7 = 20 – 10 + 3 "10 – 3 es 7 entonces le saco 10 pero le pongo 3 y es 13".

Como hemos argumentado en la fundamentación, tenemos que apuntar a que todos los alumnos amplíen su dominio del repertorio aditivo y que reconozcan la utilidad de apoyarse en lo que saben para resolver otros cálculos.

Los recursos para el trabajo de cálculo mental

Hemos dicho antes que la construcción paralela y vinculada del cálculo pensado y del cálculo automático requiere que se lleven adelante, sistemáticamente, dos tipos de actividades:

— un trabajo de memorización de repertorios y reglas, a medida que se han ido construyendo, y
— un trabajo colectivo, lento y detallado, de aprendizaje de cálculo mental pensado, que se apoya en la comparación de diversos procedimientos utilizados por distintos chicos para tratar el mismo problema.

En este sentido, es importante analizar cuáles son los recursos y clases de actividades que se pueden proponer en función de los objetivos que se definan para cada clase o período de trabajo.
Los juegos tienen un rol importante. Por un lado, permiten

que empiece a haber en la clase más trabajo independiente por parte de los alumnos: aprenden a respetar reglas, a ejercer roles diferenciados y controles mutuos, a discutir, a llegar a acuerdos. Por otro lado, brindan al docente mayores oportunidades de observación, la posibilidad de variar las propuestas según los niveles de trabajo de los alumnos e incluso trabajar más intensamente con quienes lo necesitan.

Estos juegos (con cartas, dominó, dados, loterías, memotest, etcétera.) armados en función de contenidos de cálculo mental, pueden ser un estímulo para la memorización, para acrecentar el dominio de ciertos cálculos.

La utilización de juegos brinda posibilidades, pero tiene límites que debemos reconocer.

Durante los juegos, la actividad de cada niño queda librada a su capacidad e interés. Aunque los niños se involucren, les es muy difícil reconocer en los juegos algo que *hay* que aprender, o más ampliamente, cuál es la utilidad o importancia del conocimiento puesto en juego.

En este punto, el docente tiene un rol insoslayable en cuanto a proponer actividades de otra naturaleza que permitan a los alumnos:

— tomar conciencia de lo que saben;
— reconocer la utilidad (economía, seguridad) de usar ciertos recursos (resultados memorizados, ciertos procedimientos, etc.);
— tener una representación de lo que hay que lograr, lo que hay que saber;
— "medir" su progreso;
— elegir, entre distintos recursos, los más pertinentes;
— ser capaces de fundamentar sus opciones, sus decisiones.

Es el docente quien, a través de sus intervenciones, buscará que los alumnos establezcan nexos entre los distintos aspectos que están trabajando.

Una de las herramientas con que cuenta el docente para producir mediaciones entre unas formas de actividad y otras es el *juego simulado*. Este consiste en que, tomando como contexto de referencia un juego o situación con la que se ha trabajado, el docente elabora "ejercicios", enunciados que toman datos del juego pero frente a los cuales los alumnos trabajan como ante un problema, sin la prisa del juego y con oportunidad de explicitar y/o discutir sus opciones (lo cual en los juegos no siempre es necesario).

Daremos un ejemplo en relación con un juego que denominamos "Lo más cerca posible" y que consiste en lo siguiente:

El objetivo es formar un número que esté lo más próximo posible de otro dado.

Para ello, cada alumno o equipo, según como se haya organizado la actividad, recibe tres cartas con dígitos. Cada vuelta hay un número al que hay que tratar de aproximarse.

Consigna: "Con los tres números que reciben tienen que armar el número que les parece que está más cerca de... Cuando cada uno haya armado el suyo, miran todos y tienen que establecer quién ganó".

Es una actividad en la que se pone en juego el conocimiento del sistema de numeración y en la que se realiza una comparación de cantidades en la que *a veces* se hace necesario *medir la distancia* de unos números con otros, ya que frecuentemente se puede establecer quién es el ganador por comparación global.

Por ejemplo, si el número a aproximar es 400 y han formado 512, 326, 408, 473, 589, no hay discusión.

En cambio, siempre para 400, si han formado 609, 467, 352, 501, 361, hay mayor necesidad de medir la distancia entre los números.

Estos son los casos que más interesan, ya que ponen en juego el problema de cómo medir la distancia. Por lo cual, además de distintas formas de interacción en la clase, el docente puede proponer ejercicios para ser resueltos individualmente, como éstos:

500

567	478	461	519
Luis	Ana	Laura	Julián

¿Quién ganó?
¿Todos armaron el número más próximo posible según sus cartas?
¿Cuál cambiarías?

$\boxed{600}$

571	498	634	550
Luis	Ana	Laura	Julián

Luis y Laura dicen que ganaron. Para vos, ¿quién ganó?...
¿Cómo se puede demostrar que ése es el ganador? Explicálo.

$\boxed{425}$

321	567	298	601
A	B	C	D

¿Qué equipo ganó?
¿Qué hiciste para saberlo?

En 3º grado, por ejemplo, es muy probable que la mayoría de los alumnos utilicen el complemento para medir en forma aproximada o exacta la distancia entre dos números.

Así, de 571 a 600, proceden del siguiente modo: 571 + 9 = 580, 580 + 10 = 590, 590 + 10 = 600, han agregado 29.

Si bien el complemento es, en muchos casos, muy útil, hay otros casos en que la resta es el procedimiento más económico. Sin embargo, muchos alumnos no reconocen esta situación como una situación para la cual la resta es un procedimiento eficaz.

Para favorecer la discusión entre los alumnos respecto de los procedimientos, el docente puede apelar a un recurso que es central en el trabajo de cálculo mental: *la organización de la clase,* variando y combinando en pequeños grupos, momentos de trabajo colectivo y momentos de trabajo individual.

Para continuar con el ejemplo, habiendo jugado *dentro* del equipo a "Lo más cerca posible", el docente puede proponer jugar *entre* equipos.

Cada equipo recibe tres cartas con dígitos y se establece un número a aproximar. Los equipos discuten qué número proponer.

El docente escribe en el pizarrón los números propuestos por cada equipo, pero no se dice quién es el ganador. Los equipos trabajan para establecerlo. Cuando les toca responder, explican cómo lo averiguaron.

Probablemente estén coexistiendo el complemento y la resta. Esto se retoma en una clase centrada en los procedimientos. El docente propondrá pares de números para medir la distancia entre ellos, y los alumnos decidirán qué procedimiento les resulta más útil. El objetivo no es "desacreditar" el complemento sino reconocer los límites de utilización. Se busca que todos los alumnos reconozcan a la resta como una herramienta útil, definiendo también los casos en los que es más útil que el complemento.

Cuando se trabajan repertorios (aditivo, sustractivo, multiplicativo) es importante propiciar la toma de conciencia individual de cuáles son los cálculos disponibles para cada alumno y, a la vez, provocar recortes de los repertorios, respecto de los cuales se proponen actividades tendientes a que *todos* los alumnos los dominen. Hay en esto un interjuego entre los logros individuales y los logros con los que se busca comprometer a toda la clase.

Por ejemplo, en 3º y 4º grado, cuando se trabaja con la tabla pitagórica de productos, se la va completando, analizando, y en paralelo se propone el desafío de ir memorizando los productos.

Es interesante que cada alumno disponga de una tabla en la que va escribiendo los productos que "ya sabe", y cuando el maestro o los compañeros le pregunten resultados de productos respondan según los que figuran en esa tabla.

A la vez, en la clase se discute cuáles son los productos que más importa saber para ser capaz de encontrar fácilmente aquellos que no se han memorizado, así como las diferentes maneras de obtener un producto (x 8 es lo mismo que x 2 x 2 x 2).

Estos recursos se afichan para recordarlos de clase a clase. Se confeccionan carteles que actúan como "diccionario", archivo, memoria del trabajo o referencia de lo que hay que lograr, de los compromisos establecidos. Se vuelve a ellos, se los modifica, se los cambia por otros nuevos.

SEGUNDO CICLO: LA ORGANIZACIÓN DE UNA CLASE DE CÁLCULO MENTAL

En nuestro trabajo con docentes sobre cálculo mental frecuentemente comentan que les resulta sencillo imaginar momentos breves de actividad; en cambio, les parece más difícil organizar una clase o secuencia de clases completa.

Aunque acordamos en que muchos momentos pueden ser propicios para análisis como los propuestos, creemos que es conveniente planificar un trabajo sistemático y otorgarle un tiempo semanal. Estos comentarios son válidos para los distintos ciclos.

Vamos a presentar ahora la organización de una clase con la idea de que resulte, como plantea Gimeno Sacristán, ejemplos tentativos adaptables por cada uno de los docentes, pero lo suficientemente concretos como para que sean "ejemplos imitables" o trasladables a la práctica.

Secuencia didáctica [3]

Objetivo: Encontrar criterios de redondeo para realizar cálculos mentales aproximados con medidas de longitud, capacidad, peso, etcétera.

Organización de la clase: Los alumnos trabajan en grupos de 4 o 5. Se numera los miembros de cada grupo. Así, para cada ejercicio el docente elige un número, y el alumno con ese número será el que responde inicialmente. Por ejemplo, para este ejercicio responden los "número 3".

El docente escribe en el pizarrón el cálculo siguiente:

$$\tfrac{3}{4}\text{ kg} + 270\text{ g} + 0{,}680\text{ kg}$$

y los tres resultados: $\boxed{1\text{ kg}}$ $\boxed{1\ \tfrac{1}{2}\text{ kg}}$ $\boxed{1\ \tfrac{3}{4}\text{ kg}}$

Consigna: Los niños designados escriben en un papel el resultado, elegido entre los tres dados, que consideren más aproximado al resultado exacto y lo entregan.

Es importante remarcarles a los alumnos que en ese momento no debe haber comentarios en los equipos; que después habrá tiempo para la discusión.

El docente anota los resultados de cada equipo en el pizarrón.

3. Adaptada de una secuencia elaborada por Irma Saiz.

Trabajo en grupos

1) En cada equipo discuten la aproximación entregada y su justificación, en el caso de que estén de acuerdo, o bien los argumentos por los cuales cambiarla.

2) El docente pregunta a los equipos si mantienen o no la aproximación elegida y las razones.

3) Se otorgan los puntajes a los equipos. Gana dos puntos el o los equipos que hayan dado la aproximación más cercana. El que dio una aproximación errónea pero luego de la discusión en el grupo la cambió, gana un punto.

4) Se reanuda el trabajo sobre otros cálculos, por ejemplo:

$$782\text{ g} + 2{,}5\text{ kg} + 427\text{ g}$$

$\boxed{3\text{ kg}}$ $\boxed{4\text{ kg}}$ $\boxed{5\text{ kg}}$

o, por ejemplo, trabajando con otra magnitud

$$63\text{ cm} + 0{,}22\text{ m} + 3/4\text{ m} =$$

$\boxed{1\text{ m}}$ $\boxed{1{,}75\text{ m}}$ $\boxed{2{,}2\text{ m}}$

5) Después de haber jugado el número de veces que el docente juzgue conveniente, se puede pedir a los alumnos que comenten los criterios de aproximación que les fueron más útiles. También puede ser que el docente haya detectado un criterio usado por algunos de los alumnos, interesante pero no muy difundido en la clase. Es el momento de recuperarlo para todos.

Trabajo individual, control grupal

Se retoman los ejercicios trabajados

1) Cada niño encuentra el resultado exacto, comparan en el equipo y se ponen de acuerdo en el resultado correcto.

2) Calculan la diferencia entre la aproximación y el resultado exacto.

Algunas consideraciones

1) Es conveniente acumular los puntajes de los equipos a lo largo de varias estimaciones; de esta manera se establece una competencia entre los equipos para lograr mejores aproximaciones en los cálculos mentales.

2) Es importante que los alumnos tengan suficiente tiempo para rever su resultado y discutir en el equipo. El puntaje mayor se asigna de todos modos a la primera producción para favorecer que los alumnos asuman su responsabilidad y se comprometan en hacer la mejor elección posible.

3) El momento de la confrontación entre las diversas propuestas de los equipos es importante. Los equipos tienen que ser capaces de argumentar, de justificar por qué sostienen o cambian lo propuesto. Aparecen entonces criterios utilizados para aproximar los datos que eventualmente pueden constituirse en "acuerdos" que se sostienen de una clase a otra.

4) El docente debe promover la formulación de criterios, que se han producido durante el trabajo pero que no están claros o presentes para todos. Por ejemplo, en un grado en el que trabajamos con esta secuencia la mayoría de los alumnos pensaban cantidades como 682 g, 703 g, como 1/2 kg y ... g, lo cual a veces los conducía a restar importancia a la diferencia con 1/2 kg. Algunos alumnos comenzaron a aproximar dichas cantidades a 3/4 kg, lo que los condujo a mejores estimaciones del resultado. Hay en esto un criterio que es importante que sea formulado y reutilizado en otras situaciones.

5) El docente continuará con ejercicios del mismo tipo con otras magnitudes o con otros ejercicios según los temas que desea trabajar: operaciones con números naturales, fraccionarios, decimales, etcétera.

Comentarios

En la organización de esta clase se han previsto momentos individuales, trabajo dentro del equipo y confrontación entre equipos. Indudablemente, los alumnos serán capaces de aceptar las

condiciones de cada momento y de producir con respeto y responsabilidad si han tenido oportunidad de aprender a trabajar con otros, a asumir roles diferenciados, a justificar sus ideas, etc. En este sentido, un maestro que desee proponer un trabajo así tendrá que empezar por proponer juegos y actividades que, planteados sobre contenidos de interés, permitan ir generando las condiciones de trabajo referidas.

En esta secuencia en particular hay un desafiante interjuego entre las ideas de un alumno, las de los otros miembros del equipo y las de los demás equipos. Es importante que los alumnos sean capaces de sostener sus ideas y de presentar argumentos para defenderlas tanto como de dejarse convencer ante argumentos mejores.

En un grado sucedió lo siguiente: para el cálculo con que iniciamos esta secuencia de los 5 alumnos designados, 4 propusieron 1 1/2 kg como el resultado más aproximado y sólo uno propuso 1 3/4 (que es el más aproximado).

Era entonces el momento de discutir dentro de los equipos: ¡qué desafío para el alumno que propuso el correcto! Tenía que sostenerlo ante sus compañeros pese a la abrumadora coincidencia de los demás equipos (la mayoría suele ser considerada criterio de verdad).

El recurso que usó fue explicar por qué había descartado 1 1/2 kg, de hecho cuando lo presentó ante todos dijo: "Yo primero había pensado 1 1/2 pero...".

Los restantes equipos habían revisado su propuesta inicial y coincidieron todos en la aproximación más correcta.

Lograr que los alumnos se involucren en trabajos como éstos es costoso. Se están cambiando las "reglas del juego" que comúnmente rigen en las clases. Los alumnos están aprendiendo a poder determinar si algo es correcto o no, si es la mejor solución o si hay otra mejor. El maestro deja de ser el único capaz de determinar la verdad o falsedad.

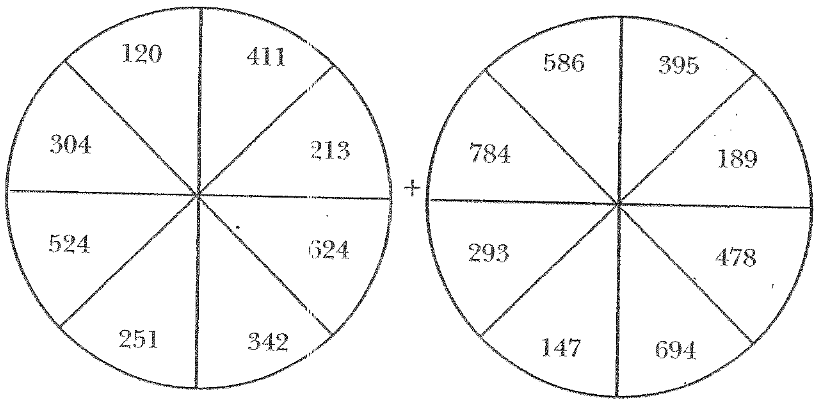
Es un cambio fuerte por el que habrá que trabajar cada vez, ya que nunca será definitivo, pero al menos es posible pretender que los alumnos tengan, en su historia de aprendizaje, algunas experiencias de debate sobre el conocimiento que les muestren que la verdad puede ser el producto del trabajo responsable.

Presentamos a continuación un juego (tomado de Castro Martínez y otros, 1989) sin realizar el análisis correspondiente. Para su utilización es importante definir el objetivo, prever los diferentes momentos de trabajo y, eventualmente, la prolongación en ejercicios escritos individuales que les permitan a los alumnos poner en juego los criterios y conocimientos elaborados, y a los docentes evaluar en qué medida cada alumno se ha apropiado del trabajo realizado.

Ruleta de la estimación

La figura representa dos discos de cartón con números: ambos discos están fijados por el centro a un panel y pueden girar.

Después de hacer girar los dos discos, cada jugador debe estimar la suma (o la operación que se crea conveniente) de los números que coincidan, indicando en qué intervalo está el resultado.



100-299	900-1099
300-499	1100-1299
500-699	1300-1499
700-899	1500-1699

TERCER CICLO: ALGUNOS EJERCICIOS INTERESANTES

Presentamos ahora algunos ejercicios que, aunque pueden ser planteados para un trabajo individual, sólo desplegarán toda su potencia a raíz de los intercambios y de las reflexiones que susciten. Para ello es necesario prever formas de organización de la clase que permitan que todos los alumnos participen en las distintas fases y se involucren en actividades de distinto carácter, ya que no es lo mismo elegir un resultado entre varios que tener que justificar una elección, ni es lo mismo resolver un caso que probar si funciona para otros o para todos los casos.

a) Criticar y justificar la inexactitud de los resultados,

1813	para	1547 + 268
16422	para	27432 – 10510
24624	para	4230 x 57
36360	para	630 x 72
107	para el cociente de 5421 : 67	
31	para el cociente de 4519 : 15	

Nos referimos a justificaciones del siguiente tipo: "24.624, no puede ser el resultado de 4230 x 57, porque 4000 x 60 es 240.000" o "porque 4000 x 6 ya es 24.000, entonces por 60 tiene que dar un resultado de 6 cifras" o "ya está mal porque el primer dígito tiene que ser cero" (7 x 0)".

Algunas justificaciones incluyen herramientas de análisis útiles para controlar algoritmos y merecen ser retenidas (formuladas como un producto del trabajo, retomadas en otras situaciones) para tender a que todos los alumnos las utilicen. Por ejemplo, las relativas al número de cifras de un producto o de un cociente.

b) La maestra propuso una serie de cuentas y los alumnos dieron como resultados los siguientes. Sin resolver las cuentas, indicar el resultado que consideran correcto.

6543 + 2721	964; 9200; 8704; 9264; 10.433
8723 – 1695	8128; 7028; 7122; 7172
237 x 18	4324; 4266; 4936; 3596; 2986
437 x 7,3	3190,1; 28291; 3171; 31910

En el análisis del trabajo se pondrá el acento en los criterios que les permitieron descartar alternativas y, correlativamente, encontrar el resultado correcto.

Por ejemplo, en 237 x 18, 4324 no puede ser porque el primer dígito tiene que ser 6. Para estimar la magnitud del resultado se puede hacer mentalmente 237 x 20 = 4740, lo cual elimina 4936 y, ajustando la estimación, se puede restar 500 (resultado aproximado de 237 x 2) a los 4740, con lo que se obtiene 4240, próximo a 4266, y se han eliminado 3596 y 2986.

Por supuesto, otros razonamientos son posibles y resulta interesante la confrontación.

En algunos casos, el conocimiento de una regla permite reconocer directamente el resultado correcto. Por ejemplo, para 437 x 7,3 se puede anticipar que el resultado ha de tener una cifra decimal y sólo 3190,1 cumple con esa condición. Sin embargo, no todos los alumnos usarán ese conocimiento, y la discusión será una situación propicia para que lo tomen en cuenta quienes no lo han considerado así como para trabajar a fondo los razonamientos erróneos. Es importante que las ideas equivocadas sean explicitadas y se fundamente su rechazo, sobre todo por parte de quienes las han utilizado.

A la vez, es interesante plantear el problema de si esa "regla" es válida para todos los casos.

Siempre que multiplico un número entero por un número con una cifra decimal, ¿obtengo un número con una cifra decimal?

Se puede proponer a los alumnos que busquen otros ejemplos; la regla deja de ser general si se encuentra un caso en el que no funciona. Por ejemplo, ¿qué sucede con 435 x 7,2? Habrá que precisar entonces en qué condiciones funciona y en cuáles no.

c) ¿Podrías obtener todos los números del 0 al 10 usando cuatro veces el número 4 y por lo menos una de las operaciones: suma, resta, multiplicación y división?

Algunas de las soluciones que pueden presentar los alumnos, por ejemplo, para obtener 1 son:

$4 : 4 \times 4 : 4 = 1$ $\qquad$ $4 : 4 + (4 - 4) = 1$

$\dfrac{4 + 4}{4 + 4} = 1$ $\qquad$ $\dfrac{4 \times 4}{4 \times 4} = 1$

o, por ejemplo, para obtener 4:

$(4 - 4) : 4 + 4 = 4$ $\qquad$ $4 + 4 \times (4 - 4) = 4$

Es interesante involucrar a los alumnos en una investigación para establecer si con otros dígitos, usados cuatro veces y con las operaciones mencionadas, es posible obtener los números de 0 a 10 (por ejemplo, con 3 y con 7).

Este trabajo es una buena ocasión para precisar las reglas de escritura matemática (uso de paréntesis, precedencia de signos) así como las propiedades de las operaciones, en particular el rol del 0 y del 1 en cada una de las operaciones.

Una actividad más sencilla vinculada a ésta puede ser:

Dados los números 11; 4; 6; 23 y utilizando las cuatro operaciones tratar de acercarse lo más posible al número 460.

Ejemplo: (6 + 4) x (11 + 23) = 340.

Bibliografía

Bergada Mugica, E. y otras (1985-1990): *Así aprendemos matemática 1, 2, 3, 4, 5*, Libro del alumno, Libro del maestro, Buenos Aires, Hachette, Edicial.

Brun, J. (1980): "Pedagogía de las matemáticas y psicología: análisis de algunas relaciones", *Revista Infancia y Aprendizaje*, nº 9, España.

Butlen, D. y Pezard, Mo. (1990): "Calcul mental, calcul rapide", *Gran N*, nº 47, págs. 35 a 59, Francia.

—(1992): "Calcul mental et resolution de problèmes multiplicatifs. Une expérimentation du CP au CM2", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12, nº 2-3, págs. 319-368, Francia.

Castro Martínez, E.; Castro Martínez, E.; y Romero, L. y Segovia, I. (1989): *Estimación en cálculo y medida*, Ed. Síntesis, España.

Coll, C. (1983): *Psicología genética y aprendizajes escolares*, Siglo XXI, España.

Conne, F. (1985): "Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 5, nº 3, págs. 269-332, Francia.

ERMEL (1981): *Apprentissages mathématiques à l'école élementaire*, 1º. a 5º grado, Haitier, Francia.

(1991): *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*, C.P., Haitier, Francia.

Fayol, M. (1985): "Nombre, numération et dénombrement: que sait-on de leur acquisition?", *Revue Française de Pédagogie*, nº 70, págs. 59-77.

Fisher, J. P. (1987): "L'automatisation des calculs elémentaires à l'école", *Revue Française de Pédagogie*, nº 80, págs. 17-24.

Gómez Alfonso, B. (1988): *Numeración y cálculo*, Síntesis, España.

Kamii, C. (1986): *El niño reinventa la aritmética*, Visor Libros, España.

—(1992): *Reinventando la aritmética II*, Visor Distribuciones, España.

Parra, C. y Saiz, I. (1992): *Los niños, los maestros y los números*, Secretaría de Educación, MCBA, Buenos Aires.

Posner, M.L. (1978): *Chronometric explorations of mind*, Hillsdale, Erlbaum.

Resnick, L.B. (1983): "A developmental theory of number understanding" en Guinsburg H.P. (comp), *The development of mathematical thinking*, Nueva York, Academic Press.

Saiz, I. y Fregona, D. (1984): *¿"Quién adivina el número? Representación de los números naturales en la recta numérica"*, Laboratorio de de Psicomatemática, DIE-CINVESTAV, México.

Documentos curriculares

Consejo General de Educación: "Matemática", 1990, Corrientes.

Consejo Provincial de Educación: "Diseño Curricular Nivel Primario", Matemática, Río Negro.

Department of Education and Science: *Mathematics from 5 to 16*, Curriculum Matters 3, Crown, Londres, 1987, 2ª ed.

Ministerio de Educación y Ciencia: "Diseño Curricular Base-Educación Primaria", España, 1989.

National Council of Teachers of Mathematics: "Curriculum and evaluation standars of school mathematics", EE.UU., 1989.